

DIEGO HAYASHI ALONSO

**Projeto, Fabricação e Caracterização de uma Bomba Tesla**

São Paulo

2017

DIEGO HAYASHI ALONSO

**Projeto, Fabricação e Caracterização de uma Bomba Tesla**

Trabalho apresentado à coordenação do curso de Engenharia Mecatrônica da instituição Escola Politécnica da Universidade de São Paulo como pré-requisito para obtenção de título de Engenheiro.

Orientador:  
Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva

São Paulo

2017

### Catalogação-na-publicação

Alonso, Diego Hayashi

Projeto, Fabricação e Caracterização de uma Bomba Tesla / D. H. Alonso --

São Paulo, 2017.

307 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1.Bombas centrífugas 2.Método dos elementos finitos 3.Dinâmica dos fluidos (Simulação) 4.Métodos topológicos (Otimização). I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II.t.

## AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva, por todas as importantes orientações recebidas durante a realização deste trabalho e pelo constante apoio e dedicação.

A todos os colegas do Laboratório de Otimização de Sistemas Multifísicos (MSOL) pelas discussões acadêmicas, sugestões e auxílio. Ao Luís Fernando Nogueira de Sá pelo auxílio no projeto e parte experimental da bomba Tesla otimizada, ao Ricardo Doll Lahuerta por fornecer código que auxiliou na implementação de repetição de padrão, ao Francisco Oliveira pelo auxílio na impressão e pós-processamento das peças impressas.

Ao Prof. Dr. Juan Sérgio Romero Saenz pelo auxílio na dedução das equações do modelo 2D de escoamento girante e das suas formas discretas.

Ao Prof. Dr. Oswaldo Horikawa pela fabricação de peças para ajuste e montagem experimental do protótipo de bomba Tesla otimizada.

À equipe da oficina do Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos (PMR), em especial ao técnico Fidel Vicente de Paula, que auxiliou na fabricação do protótipo de bomba Tesla de CDs. Agradeço ao técnico Adhemar de Sá do Laboratório de Caracterização Tecnológica (LCT) pelas sugestões no projeto da bomba Tesla de CDs.

À minha família, por me dar todo o apoio e incentivo imensuráveis em todos os aspectos ao longo de todos estes anos.

Um muito obrigado a todos que direta ou indiretamente contribuíram na execução deste trabalho.

## RESUMO

Dispositivos Tesla são compostos de discos rotativos (sem palhetas) que funcionam por efeito da camada limite (i.e., por forças de atrito viscoso atuando no fluido e efeito Coandă). Segundo esse princípio de funcionamento, o fluxo resulta contínuo e não pulsátil. O objetivo deste projeto é projetar, fabricar e caracterizar uma bomba Tesla visando melhorar eficiência e potência. A bomba Tesla tem várias aplicações, porém a eficiência de seu funcionamento é consideravelmente baixa, o que abre espaço para otimização do seu projeto.

Este projeto é realizado por meio de otimização do rotor e da voluta da bomba Tesla para operação com um fluido *newtoniano* em escoamento laminar. O funcionamento da bomba Tesla é simulado usando o Método de Elementos Finitos na plataforma FEniCS e validado com o *software* ANSYS® CFX. A otimização topológica é implementada na plataforma FEniCS utilizando-se a biblioteca *dolfin-adjoint* no cálculo de sensibilidades (derivadas) e o algoritmo IPOPT para otimização.

São fabricados e caracterizados experimentalmente dois protótipos: um protótipo de bomba Tesla usando CDs (discos de policarbonato usados para armazenamento digital de dados) como os discos do rotor, com o espaçamento otimizado por análise paramétrica; e um protótipo projetado pelo método de otimização topológica (fabricado por meio de manufatura aditiva).

Palavras-chave: Bombas centrífugas. Dinâmica dos fluidos (Simulação). Método dos elementos finitos. Métodos topológicos (Otimização).

## ABSTRACT

Tesla devices consist of rotating disks (without blades), whose operation is based on the boundary layer effect (i.e., viscous friction forces acting on the fluid and Coandă effect). According to this working principle, the flow becomes continuous and nonpulsatile. The objective of this project is to design, fabricate and characterize a Tesla pump aiming to improve its efficiency and power. The Tesla pump has various applications, but the efficiency of its operation is quite low, which makes room for the optimization of its design.

This project is based on the optimization of the rotor and the volute of a Tesla pump operating with a newtonian fluid in laminar flow. The operation of the Tesla pump is simulated by using the Finite Element Method in the FEniCS platform and validated with the software ANSYS® CFX. The topology optimization is implemented in the FEniCS platform by using the `dolfin-adjoint` library for sensitivity (derivative) calculation and the IPOPT algorithm for optimization.

Two prototypes are fabricated and characterized experimentally, consisting of a Tesla pump composed of CDs (polycarbonate discs used as digital data storage) as the rotor disks; and a prototype designed by the topology optimization method (fabricated by additive manufacturing).

**Keywords:** Centrifugal pump. Fluid dynamics (Simulation). Finite element method. Topology methods (Optimization).

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	10
1.1 BOMBA TESLA E PRINCÍPIO TESLA.....	10
1.2 BREVE INTRODUÇÃO À OTIMIZAÇÃO TOPOLOGÍCA.....	14
1.3 MOTIVAÇÃO.....	15
1.4 ESCOPO.....	16
1.5 INTRODUÇÃO À METODOLOGIA.....	16
1.6 VISÃO GERAL.....	16
2 ANÁLISE DE REQUISITOS.....	17
3 REVISÃO DO ESTADO DA ARTE.....	19
4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	28
4.1 MODELAGEM DO ROTOR DA BOMBA TESLA.....	30
4.1.1 Equação da continuidade.....	30
4.1.2 Equações de Navier-Stokes.....	31
4.1.3 Sistema de referência rotativo.....	32
4.1.4 Tensor de tensões.....	35
4.1.5 Sistema de coordenadas cilíndrico.....	35
4.1.6 Condições de contorno para o modelo de 2 discos da bomba Tesla.....	36
4.2 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.....	38
4.2.1 Forma fraca do problema 3D.....	39
4.2.2 Simplificação para o modelo 2D de escoamento girante.....	41
4.2.3 Forma fraca do problema para o modelo 2D de escoamento girante.....	43
4.2.4 Resolução da forma fraca do problema.....	44
4.2.5 Modelagem do elemento finito.....	46
4.3 VARIÁVEIS DE CARACTERIZAÇÃO.....	47
4.3.1 Vazão volumétrica.....	47
4.3.2 Variação de pressão.....	49
4.3.3 Carga manométrica.....	49
4.3.4 Dissipação de energia.....	52
4.3.5 Potência e torque de máquina de fluxo.....	54
4.3.6 Vorticidade.....	57
4.4 ANÁLISE DE SEMELHANÇA.....	57

4.4.1 Parâmetros adimensionais para o rotor da bomba Tesla.....	58
4.4.2 Parâmetro adimensional para a voluta da bomba Tesla.....	61
<b>4.5 OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA.....</b>	<b>62</b>
4.5.1 Variável de projeto e modelo de material.....	64
4.5.2 Otimização topológica do rotor da bomba Tesla.....	73
4.5.3 Otimização topológica da voluta da bomba Tesla.....	75
<b>4.6 SENSIBILIDADES NA OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA.....</b>	<b>77</b>
4.6.1 Cálculo de sensibilidades pelo método adjunto.....	77
4.6.2 Sensibilidade no projeto do rotor.....	79
4.6.3 Sensibilidade no projeto da voluta.....	80
<b>5 ABORDAGEM METODOLÓGICA.....</b>	<b>81</b>
<b>6 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA.....</b>	<b>83</b>
6.1 MODELAGEM E SIMULAÇÃO NO FEniCS.....	83
6.1.1 Simulação no FEniCS.....	86
6.2 MODELAGEM E SIMULAÇÃO NO ANSYS® .....	90
6.2.1 Modelo 2D de escoamento girante no ANSYS® CFX.....	91
6.3 OTIMIZAÇÃO NO FEniCS.....	92
6.3.1 Dolfin-adjoint.....	92
6.3.2 IPOPT.....	93
6.3.3 Procedimento de otimização topológica.....	94
<b>7 METODOLOGIA EXPERIMENTAL.....</b>	<b>97</b>
7.1 PROJETOS DO PROTÓTIPOS.....	97
7.1.1 Projeto de bomba Tesla de CDs.....	97
7.1.2 Projeto de mini bomba Tesla.....	105
7.2 FABRICAÇÃO DOS PROTÓTIPOS.....	108
7.2.1 Fabricação da bomba Tesla de CDs.....	108
7.2.2 Fabricação da mini bomba Tesla.....	108
7.3 MONTAGENS EXPERIMENTAIS.....	108
7.3.1 Montagem experimental para a bomba Tesla de CDs.....	109
7.3.2 Montagem experimental para a mini bomba Tesla.....	111
<b>8 RESULTADOS.....</b>	<b>113</b>
8.1 VALIDAÇÃO DO MODELO COMPUTACIONAL.....	113
8.1.1 Modelos para simulação.....	114
8.1.2 Análise de convergência no ANSYS® CFX.....	127

8.1.3 Comparação de resultados do FEniCS e do ANSYS® CFX.....	137
8.2 ANÁLISE PARAMÉTRICA DO ROTOR DA BOMBA TESLA DE CDs.....	144
8.3 SIMULAÇÃO DA VOLUTA DA BOMBA TESLA DE CDs.....	151
8.4 VERIFICAÇÃO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA.....	154
8.5 OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA DO ROTOR DA BOMBA TESLA.....	162
8.5.1 Bomba Tesla de entrada horizontal.....	163
8.5.2 Bomba Tesla de entrada vertical.....	167
8.5.2.1 Otimizando para dissipação de energia.....	169
8.5.2.2 Efeito da rotação / vazão volumétrica.....	173
8.5.2.3 Efeito da razão de aspecto.....	175
8.5.2.4 Efeito da fração de fluido permitida.....	177
8.5.2.5 Efeito do eixo.....	179
8.5.2.6 Otimizando para potência.....	181
8.5.2.7 Otimizando para vorticidade.....	184
8.5.3 Comparação com bomba Tesla de discos retos.....	186
8.6 OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA DA VOLUTA DA BOMBA TESLA.....	188
8.6.1 Comparação com uma voluta comum.....	197
8.7 EXPERIMENTOS COM A BOMBA TESLA DE CDs.....	201
8.8 EXPERIMENTOS COM A MINI BOMBA TESLA.....	204
9 CONCLUSÃO.....	205
REFERÊNCIAS.....	206
APÊNDICE A – Desenvolvimento detalhado do modelo 2D de escoamento girante .....	215
APÊNDICE B – Formas discretas no modelo 2D de escoamento girante.....	225
APÊNDICE C – Equações para o modelo 2D.....	240
APÊNDICE D – Esquemas de otimização usados para o rotor da bomba Tesla.....	245
APÊNDICE E – Variações no modelo de material.....	262
APÊNDICE F – Implementação da modelagem e simulação no ANSYS® CFX.....	264
APÊNDICE G – Desenhos técnicos.....	271

## 1 INTRODUÇÃO

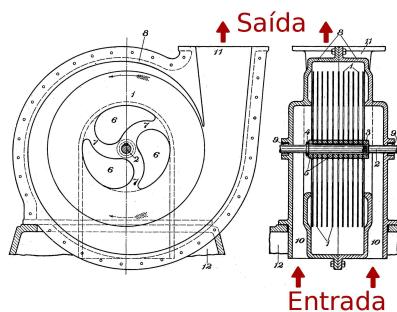
O objetivo deste projeto é modelar, simular, projetar e otimizar o rotor e a voluta de uma bomba Tesla com um *software* de elementos finitos, de modo a aumentar a sua eficiência, e fabricar e caracterizar dois protótipos: um protótipo de bomba Tesla de CDs (discos de policarbonato usados para armazenamento digital de dados) projetado por análise paramétrica, e um protótipo projetado pelo método de otimização topológica (fabricado por meio de manufatura aditiva).

### 1.1 BOMBA TESLA E PRINCÍPIO TESLA

Dentre as diversas contribuições de Nikola Tesla para o mundo atual (como em magnetismo, corrente alternada, luz, raios X, rádio e válvulas) (ERCEGOVAC, 2006), também houve contribuições na área de fluidos, como a bomba Tesla, no início do século XX.

Bomba Tesla é uma bomba de discos sem palhetas (figura 1.1.1) (TESLA, 1, 1913, p. 1) cuja característica principal é o rotor composto por vários discos rotativos paralelos espaçados ao longo de um eixo. Na configuração convencional, um motor é acoplado ao eixo da bomba Tesla e o fluido entra axialmente e sai radialmente (SASTRY et al., 2006, p. 2).

Figura 1.1.1 - Bomba Tesla segundo a patente inicial de Nikola Tesla



Fonte: Adaptado de Tesla (1, 1913, p. 1)

A bomba Tesla não possui palhetas, porque utiliza o efeito da camada limite entre os discos para mover-los (i.e., move-se por viscosidade). O princípio básico de funcionamento da bomba Tesla será referido neste trabalho, a título de simplicidade, como “princípio Tesla”. Ele está representado de maneira simplificada na figura 1.1.2: impondo-se uma rotação em 2 discos bem próximos com fluido entre eles, é possível observar um efeito de bombeamento (princípio Tesla).

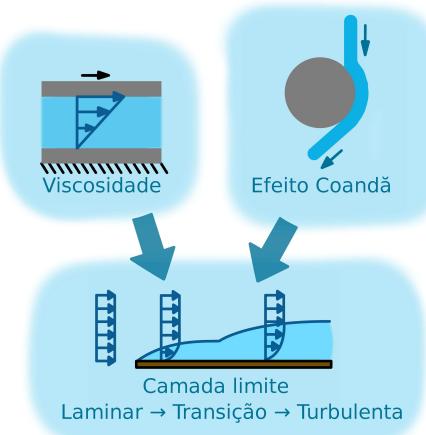
Figura 1.1.2 - Princípio Tesla exemplificado para uma bomba Tesla de 2 discos



Fonte: Própria

Na imediata vizinhança da superfície de um objeto quando submetida à passagem de fluido surge uma camada de fluido na qual os efeitos viscosos se tornam significativos (camada limite) (figura 1.1.3). A camada limite consiste basicamente em forças de atrito viscoso atuando no fluido (SASTRY et al., 2006, p. 2) e efeito Coandă (tendência de um fluido permanecer aderido a uma superfície convexa adjacente) (RAJE, 2015, p. 28) (GUPTA e KODALI, 2013, p. 1).

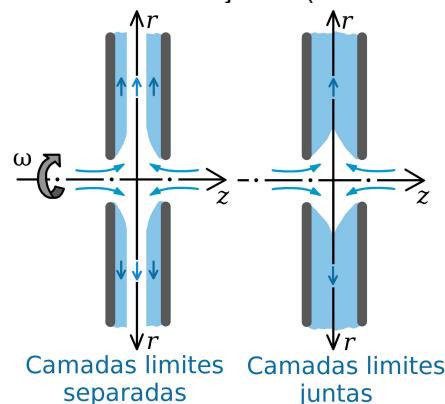
Figura 1.1.3- Efeitos que formam a camada limite



Fonte: Própria

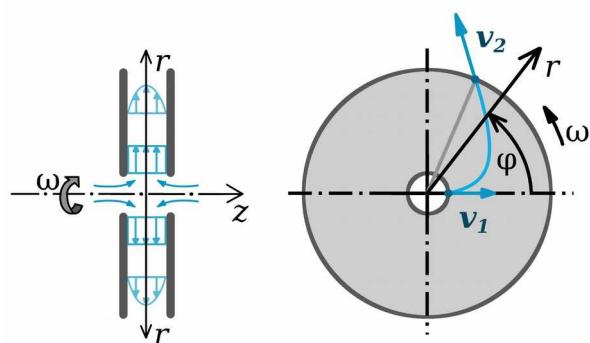
O princípio Tesla baseia-se no efeito que surge ao se aproximar uma placa plana de outra e mover uma delas com relação à outra, o que forma uma camada limite laminar (na junção das duas camadas limites separadas) e um escoamento característico (de Couette) (figura 1.1.4). Quando as duas superfícies estão paradas, mas há um fluxo de fluido, há a formação de um perfil de velocidade parabólico, similarmente a escoamento em condutos. Ao se impor um fluxo de fluido entre dois discos rotativos, observa-se que, na entrada, o perfil de velocidades deve ser uniforme, tornando-se gradativamente parabólico (considerando-se regime laminar) (PODERGAJS, 2011, p. 6). Além disso, devido à rotação (i.e., forças de inércia centrífugas), o movimento do fluido resulta espiral (PODERGAJS, 2011, p. 3) (figura 1.1.5).

Figura 1.1.4 - Formação de camada limite em dois casos: camadas limites separadas, e camadas limites juntas (escoamento plenamente desenvolvido)



Fonte: Própria (baseada em Dodsworth (2016, p. 31))

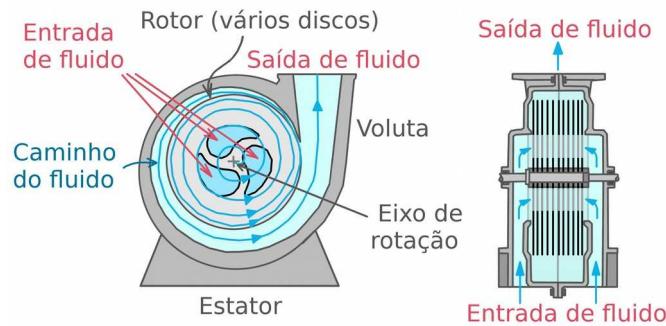
Figura 1.1.5 - Perfil de velocidades e trajetória do fluido com dois discos rotativos ( $v_1$  e  $v_2$  são velocidades do fluido na entrada e na saída, respectivamente)



Fonte: Própria (baseada em Breiter e Pohlhausen (1962, p. 21) e Yu (2015, p. 85))

O movimento espiral do fluido está ilustrado na figura 1.1.6 para uma bomba Tesla, juntamente com os principais componentes de uma bomba Tesla.

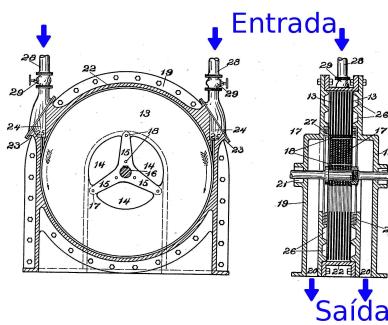
Figura 1.1.6 - Principais componentes da bomba Tesla e o movimento de fluido em seu interior, segundo a geometria proposta inicialmente por Tesla (1, 1913, p. 1)



Fonte: Própria (baseada em Podergajs (2011, p. 3) e Tesla (1, 1913, p. 1))

O princípio Tesla pode ser aplicado tanto para bomba (como visto acima) como para turbina (TESLA, 4, 1913, p. 1) (figura 1.1.7). A operação de turbina pelo princípio Tesla é caracterizada por baixa eficiência em aplicações de alta potência (RAJE, 2015, p. 29), o que limita o seu uso comercial. Porém, a sua utilização em baixas potências resulta em mais eficiência do que as turbinas convencionais (RAJE, 2015, p. 29).

Figura 1.1.7 - Turbina Tesla segundo a patente inicial de Nikola Tesla



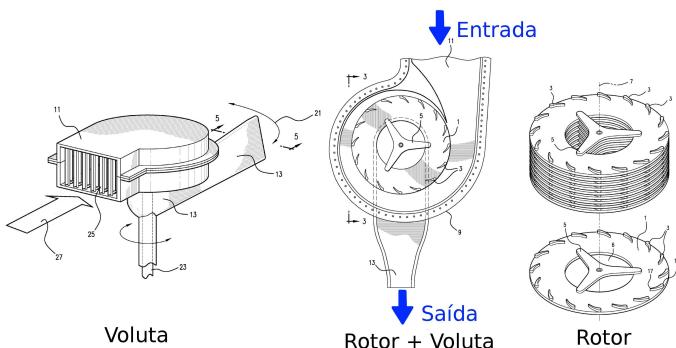
Fonte: Adaptado de Tesla (4, 1913, p. 1)

O princípio Tesla possui diversas aplicações em vários casos: turbinas a vapor (RAJE, 2015, p. 30 e 31), casos em que o fluido de trabalho contém particulados (como sal e água contaminada) (RAJE, 2015, p. 30 e 31), casos com

fluidos de baixa e alta viscosidades (RAJE, 2015, p. 30 e 31), DAVs (Dispositivos de Assistência Ventricular, *VADs*, *Ventricular Assist Devices*) (YU, 2015, p. 4), cogeração em micro-plantas de geração de energia (LAMPART, 2009), sistemas pico-hidráulicos (*Pico hydro systems*) para eletrificação rural (HO-YAN, 2011) etc.

O princípio Tesla também pode ser estendido para aplicações com gases, como turbinas a gás e vapor (TESLA, 3, 1921), ventiladores (ENGIN et. al., 2009), turbinas eólicas (FULLER, 2010), compressores (RICE, 2003) e até mesmo na geração de vácuo (TESLA, 2, 1921). A turbina eólica proposta por Fuller (2010) está reproduzida na figura 1.1.8.

Figura 1.1.8 - Turbina eólica Tesla proposta por Fuller (2010)

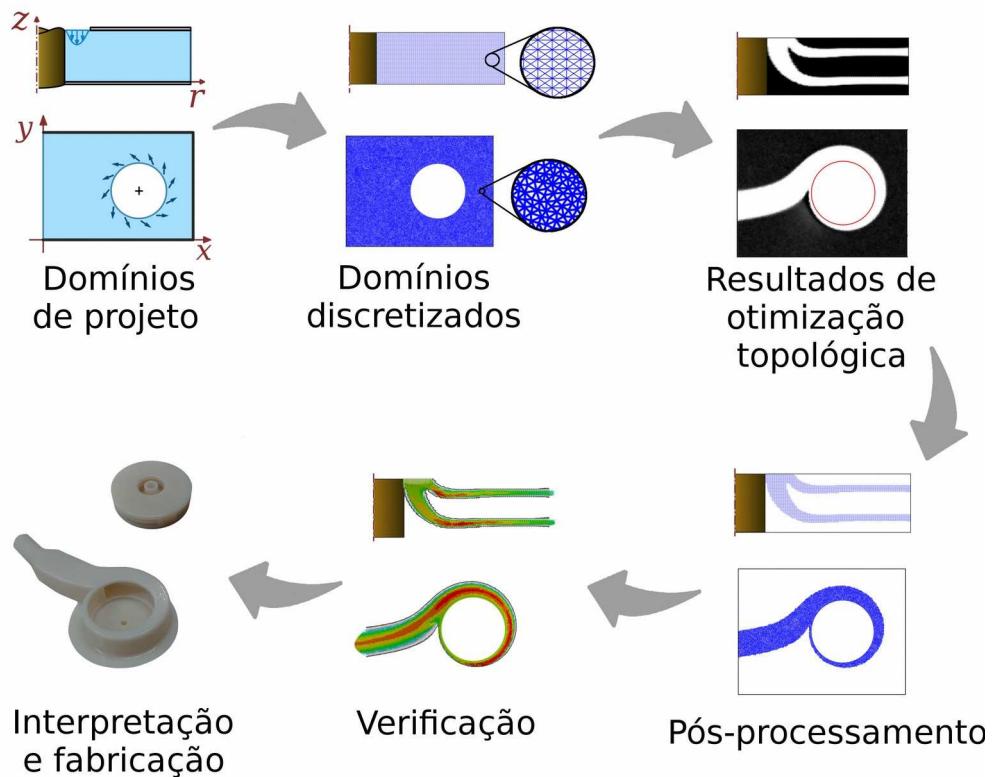


Fonte: Adaptado de Fuller (2010, p. 5, 2 e 3)

## 1.2 BREVE INTRODUÇÃO À OTIMIZAÇÃO TOPOLOGÍGICA

Para realizar a otimização de um dispositivo sem depender de um método intuitivo (como provindo da tentativa e erro), existem métodos organizados para realizar essa busca por meio de algoritmos. Dentre os métodos de otimização existentes (paramétrica, de forma e topológica), o mais genérico é o método de otimização topológica, que distribui um material dentro de um domínio (região do espaço) de forma a otimizar uma função desejada (como dissipação de energia, potência, vorticidade etc.). A sequência de projeto utilizando otimização topológica está ilustrada na figura 1.1.9.

Figura 1.1.9 - Sequência de projeto utilizando otimização topológica



Fonte: Própria

### 1.3 MOTIVAÇÃO

Dispositivos Tesla são compostos de discos rotativos (sem palhetas) que funcionam por efeito da camada limite (i.e., por forças de atrito viscoso atuando no fluido e efeito Coandă). Segundo esse princípio de funcionamento, o fluxo resulta contínuo e não pulsátil.

A bomba Tesla pertence a uma grande área de aplicações (pelo princípio Tesla), inclusive para sangue (em DAVs), porém a eficiência de seu funcionamento é consideravelmente baixa, o que abre espaço para otimização do seu projeto.

Portanto, a otimização do projeto do seu rotor pode trazer benefícios para uma grande área. No futuro, pretende-se aplicar esse conhecimento em DAVs (Dispositivos de Assistência Ventricular).

O método de otimização escolhido é o de otimização topológica, que distribui fluido e sólido dentro de um domínio (região do espaço) por meio de um algoritmo, o que evita a necessidade de se utilizar métodos baseados em intuição (tentativa e erro).

#### 1.4 ESCOPO

São projetados dois tipos de bomba Tesla otimizada. Um por análise paramétrica do espaçamento entre discos retos e outro por otimização topológica, sendo que o projeto da voluta considera um modelo 2D (cartesiano), enquanto que o projeto do rotor considera um modelo 2D de escoamento girante (“modelo 2D axissimétrico com giro”). O fluido considerado é *newtoniano* (água) e o regime de escoamento é permanente. Na otimização topológica, é utilizado o modelo de material de Borrvall e Petersson (2003), considerando uma função multiobjetivo que inclui dissipação de energia, potência e vorticidade. A implementação é feita na plataforma FEniCS, usando *dolfin-adjoint*, IPOPT e MUMPS. A validação do modelo implementado no FEniCS é feita no ANSYS® CFX.

#### 1.5 INTRODUÇÃO À METODOLOGIA

O projeto consiste no projeto, caracterização e fabricação de dois protótipos: um protótipo de bomba Tesla de CDs por análise paramétrica, e um protótipo de bomba Tesla por otimização topológica.

#### 1.6 VISÃO GERAL

Esta monografia está organizada da seguinte forma: na seção 2, é apresentada uma análise de requisitos para o projeto da bomba Tesla; na seção 3, é feita a revisão do estado da arte do projeto de bomba Tesla; na seção 4, é descrita a fundamentação teórica, incluindo a modelagem do rotor da bomba Tesla, o método

de elementos finitos, variáveis de caracterização, análise de semelhança, otimização topológica e análise de semelhança em otimização topológica; na seção 5, é apresentada a abordagem metodológica; na seção 6, é descrita e detalhada a implementação numérica de simulação no ANSYS® CFX e de simulação e otimização topológica na plataforma FEniCS; na seção 7, é descrita a metodologia experimental, incluindo projeto, fabricação e montagem experimental; na seção 8, são apresentados os resultados numéricos e experimentais; na seção 9, são inferidas as conclusões.

## 2 ANÁLISE DE REQUISITOS

Os requisitos de projeto são:

- Diâmetros dos discos de 30 a 60 mm
- Número de discos: 2 ~ 10 discos
- Operação em vazões menores do que 10 L/min
- Operação em pressões menores do que 20 kPa

Esses requisitos foram baseados na literatura (tabela 2.0.1).

Tabela 2.0.1 - Análise de valores e parâmetros na literatura

	Bomba Tesla					Turbina Tesla		Bomba centrífuga	
	Sastry et al. (2006)	Foster (2006)	Medvitz et al. (2011)	Lima et al. (2013)	Dodsworth (2016)	Choon et al. (2011)	Holland (2015)	HeartMate III (FOSTER, 2006, p. 264) [DAV**]	Sá (2016)
Abrangência									
Simulação			X		X	X			X
Experimentos	X	X		X	X	X	X		X
Software de simulação			OVER-REL			EFD.Lab		*	FENiCS / ANSYS®
Fluido									
Fluido	Mistura de água, iodeto de sódio, e glicerina	Água; Mistura de água com 45% de glicerina	Sangue	Água	Água	Água	Ar	Sangue	Água
Geometria e material									
Diâmetro externo dos discos (mm)	35	60 (diâmetro interno: 30)	20,3	95 (diâmetro interno: 25)	35	70	92 (diâmetro interno: 17)		Diâmetro do rotor: 41
Quantidade de discos	3	5 ~ 9	11	10	15 ~ 27	13	7	*	*
Espessura dos discos (mm)		3	0,25		0,79		0,8	*	*
Espaçamento entre discos (mm)		1 ~ 3	0,5	3	0,025 ~ 0,635	0,32	0,2	*	*
Material dos discos	Acrílico transparente	Perspex					Discos de HD ( <i>Hard Disk</i> , disco rígido)		Stratasys VeroClear - RGD810, VeroWhitePlus - RGD835
Parâmetros									
Vazão operada (L/min)	1 ~ 5	1 ~ 10	4 e 6	0 ~ 3	máximo: 1,58	Velocidade: - Entrada: 4,186 m/s - Saída 0,682 m/s		7	0 ~ 7
Rotação (rpm)	1500 ~ 3000	< 4000	6500 ~ 7000	147 ~ 4000	2500 ~ 4000		0 ~ 10000	< 4800	920 ~ 2643
Pressões operadas (kPa)	20,7 ~ 43,1	26,7	28			Entrada: 103,99 Saída: 101,325	14,6 ~ 15	18	0 ~ 14,7
Eficiência (%)		4 ~ 9	10 ~ 16		≤ 5,6	10,7	0 ~ 9		
Carga manométrica (m)				0 ~ 3	≤ 3,26	1,1			
Torque (N.m)						0,0334	0 ~ 0,3		
Potência (W)				46 ~ 170			74		

\* Não se aplica.

\*\* DAV = Dispositivo de Assistência Ventricular

### 3 REVISÃO DO ESTADO DA ARTE

Raje (2015, p. 2), identificou parâmetros que afetam diretamente o desempenho de equipamentos que operam pelo princípio Tesla: o número de discos (quanto maior, maior o torque resultante) (BORATE e MISAL, 2012), a dimensão dos discos (quanto maior, maior a distância percorrida pelo fluido), o espaçamento entre discos (BORATE e MISAL, 2012), o número de Reynolds (a espessura de camada limite laminar depende do número de Reynolds) e a velocidade do fluido.

Apesar de bombas operando sob o princípio Tesla ainda não possuírem amplo uso comercial (MEDVITZ et al., 2011, p. 2), o princípio Tesla possui diversas características atrativas com relação às bombas de palhetas (IZRAELEV, 2009, p. 556) (MEDVITZ et al., 2011, p. 2): manufatura e montagem mais simples (custo menor), tensões de escoamento turbulento menores (menor turbulência), ausência de condições de cavitação, escoamento mais suave de fluido (quantidade de movimento linear do fluido varia lentamente) e força mais uniforme sobre o fluido (não há força gerada por palheta quando o fluido passa pela saída de uma bomba Tesla). Além disso, o efeito de vibração na eficiência é muito pequeno (DODSWORTH e GROULX, 2015).

Segundo Dodsworth (2016, p. 1), o princípio Tesla resulta em menor sensibilidade à cavitação induzida por vibração do que bombas centrífugas convencionais (RODDY et al., 1987), e funciona bem com fluidos viscosos, o que se mostra vantajoso em aplicações de resfriamento (DODSWORTH, 2016, p. 1) e para fluidos de trabalho voláteis, como combustíveis líquidos (DODSWORTH, 2016, p. 5).

Existe também a possibilidade de utilização da bomba Tesla em DAVs (Dispositivos de Assistência Ventricular, VADs, Ventricular Assist Devices). DAVs são compostos principalmente por uma bomba de sangue que auxilia o coração e a circulação sanguínea em pessoas com corações enfraquecidos (NIST), como em casos de insuficiência cardíaca (IC, HF, Heart Failure) (BEHBAHANI et al., 2009, p. 2), reduzindo a carga de trabalho sobre o coração, mas mantendo uma pressão sanguínea adequada (NOSÉ et al., 2000, p. 415). Elas podem auxiliar durante ou após uma cirurgia até a recuperação do coração, e também enquanto se está

esperando por um transplante de coração ou quando não é possível fazer tal transplante, de forma permanente (BEHBAHANI et al., 2009, p. 3) (ANDRADE et al., 2005, p. 2). Um estudo recente (AARONSON et al., 2012, p. 3198) mostrou que a sobrevivência no uso de DAVs se tornou comparável à sobrevivência no caso de transplante de coração. A bomba Tesla se torna uma candidata interessante para utilização em DAVs, porque, por ser uma bomba rotativa de fluxo contínuo e não pulsátil, a sua utilização pode reduzir danos ao sangue, que são os principais limitantes do tempo de utilização de DAVs (SASTRY et al., 2006, p. 1): hemólise (dano prematuro em hemácias) e trombose (formação de coágulo sanguíneo em veia) (BEHBAHANI et al., 2009, p. 5). Segundo Yu (2015, p. 4), comparando-se a bomba Tesla com bombas de palhetas, a tensão média de cisalhamento induzida pelo fluxo, que é a principal causa de hemólise, é baixa. Assim, existe a possibilidade de reduzir significativamente a ocorrência de hemólise com a utilização de bomba Tesla. Por outro lado, a eficiência da bomba Tesla é relativamente baixa (normalmente menor do que 20 % (YU, 2015, p. 4) (FOSTER, 2006, p. 280)), o que gera grande transferência de calor de calor para o sangue, havendo a possibilidade de se tornar um problema para o sangue e a saúde do paciente (YU, 2015, p. 4). Portanto, há necessidade de aumentar essa eficiência.

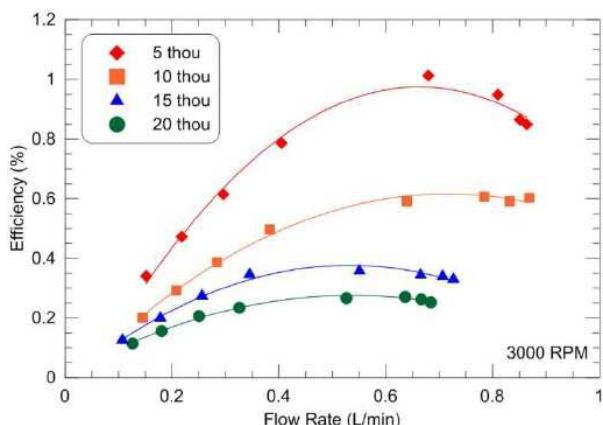
A baixa eficiência mencionada no parágrafo anterior não se verifica quando se opera em rotações muito baixas (e fluido *newtoniano* em regime laminar), em que se pode chegar à eficiências tão altas quanto 95% (RICE, 1991, p. 4) (CHOON et al., 2011, p. 477) (YU, 2015, p. 86).

As perdas hidráulicas que ocorrem em uma bomba Tesla se devem a quatro fatores principais (YU, 2015, p. 88): mudança abrupta de direção do escoamento na entrada da bomba; dissipação por atrito viscoso entre os discos, que deve ser relativamente pequena em escoamento laminar; escoamento turbulento em espiral gerado na saída radial dos discos, que pode ser reduzido diminuindo o espaçamento entre discos e o raio externo dos discos (YU, 2015, p. 88); e transição de escoamento laminar para turbulento na câmara da bomba Tesla (onde estão os discos) e na voluta.

Dodsworth e Groulx (2015) realizou uma análise paramétrica experimental com bomba Tesla operando com água, utilizando espaçamentos entre discos de

0,127 mm, 0,254 mm, 0,381 mm e 0,508 mm (no sistema inglês, 5 thou, 10 thou, 15 thou e 20 thou) (figura 3.0.1). A conclusão a que se chegou foi que espaçamentos menores entre discos resultam em maior eficiência.

Figura 3.0.1 - Resultados da análise experimental para diferentes espaçamentos entre discos realizada por Dodsworth e Groulx (2015, p. 4), para 3000 rpm de rotação

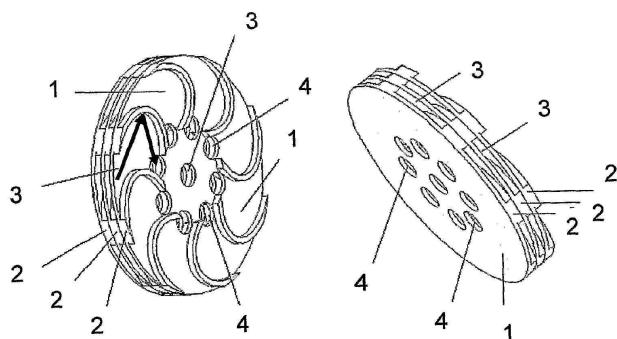


Fonte: Dodsworth e Groulx (2015, p. 4)

Borate e Misal (2012) realizaram experimentos usinando rugosidades espirais em discos que operam sob o princípio Tesla e chegaram a conclusão de que a eficiência aumentou consideravelmente.

Existe também uma proposta de se utilizar “discos tipo Pelton”, como na “turbina híbrida Tesla-Pelton” (COUTO e BATISTA, 2008) (figura 3.0.2), que, com seu formato diferenciado de discos, visa aumentar o torque provido ao eixo da turbina.

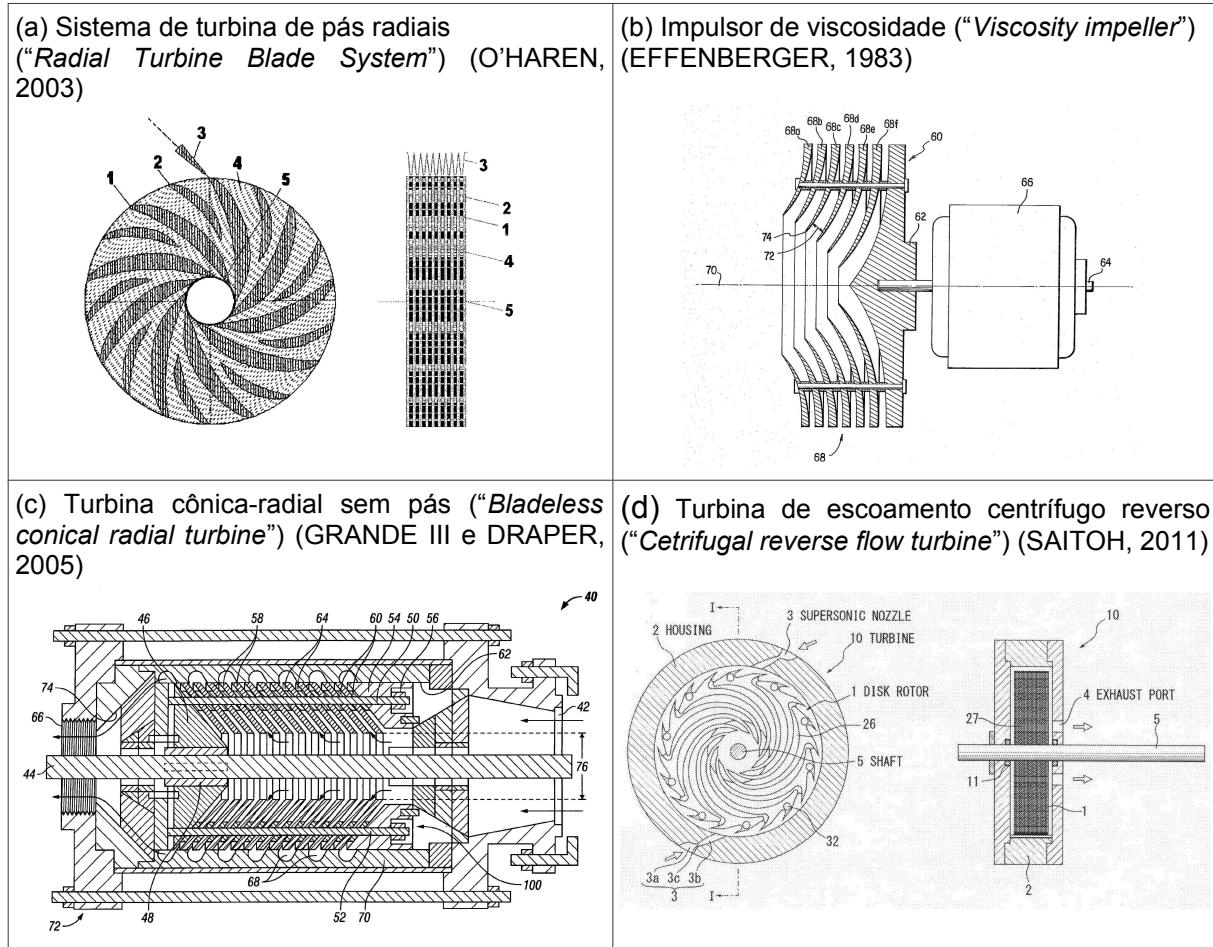
Figura 3.0.2 - Turbina híbrida Tesla-Pelton (COUTO e BATISTA, 2011, p. 2)



Fonte: Couto e Batista (2011, p. 1)

Algumas outras variantes de forma de discos de dispositivos Tesla podem ser vistas ilustrativamente na figura 3.0.3 (GUPTA e KODALI, 2013, p. 3 e 4).

Figura 3.0.3 - Algumas variantes de forma de discos de dispositivos Tesla



Fontes: (a) O’Hearen (2003, p. 1 e 3); (b) Effenberger (1983, p. 3);  
 (c) Grande III e Draper (2005, p. 3); Saitoh (2011, p. 7)

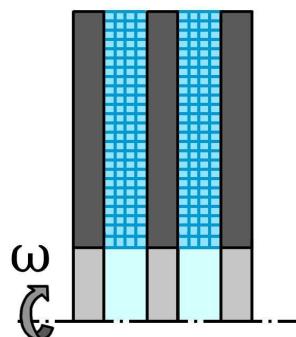
A avaliação das características e desempenho de bombas envolve uma grande quantidade de parâmetros geométricos. Para auxiliar nessa avaliação, ao invés de utilizar o método da tentativa e erro, utilizam-se simulações computacionais, que fornecem informações acuradas do comportamento do fluido.

Diferentes métodos de discretização são utilizados em DFC (Dinâmica dos Fluidos Computacional, *Computational Fluid Dynamics*) (BEHBAHANI et al., 2009, p. 12 ~ 14): volumes finitos (algoritmo SIMPLE, CD-adapco STAR-CD, ANSYS

Fluent), diferenças finitas (algoritmo SMAC), elementos finitos (XNS) e abordagem híbrida de elementos e volumes finitos (CFX-TASCflow).

Na modelagem de equipamentos pelo princípio Tesla, pode-se utilizar um modelo 2D, pois, segundo Ladino (2004), que analisou modelos 2D e 3D em DFC da bomba Tesla, a diferença de resultados entre os dois resultou pequena. Uma figura que exemplifica o modelo 2D utilizado por Ladino (2004) pode ser vista na figura 3.0.4, sendo que, para essa análise, foi utilizada simulação com um modelo 2D de escoamento girante (“2D swirl flow model”, “2D axisymmetric model with swirl”, “escoamento axissimétrico com giro”), em ANSYS® Fluent.

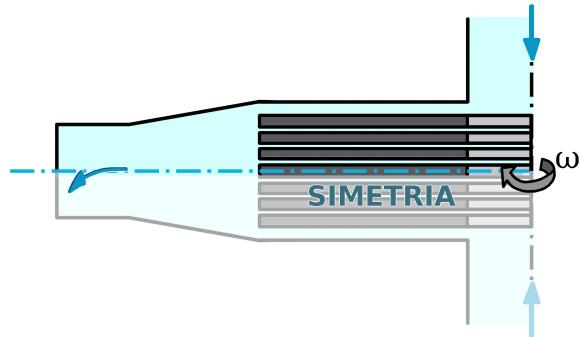
Figura 3.0.4 - Modelo 2D para 3 discos, com discretização mostrada de forma ilustrativa



Fonte: Própria (baseado em Ladino (2004, p. 43))

Yu (2015, p. 88) discute dois modelos da bomba Tesla: um mais simples (similar ao mostrado na figura 3.0.4, mas com somente 2 discos) e outro que considera uma entrada de fluido, uma saída de fluido e mais discos (figura 3.0.5). Na figura 3.0.5, a distância entre o rotor e a saída da bomba Tesla (“câmara de desaceleração”) foi escolhida como grande para minimizar a influência da fronteira em DFC (YU, 2015, p. 89)).

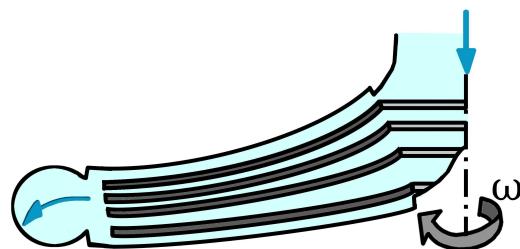
Figura 3.0.5 - Modelo 2D um pouco mais detalhado, para 7 discos



Fonte: Própria (baseado em Yu (2015, p. 89), Engel (2014))

Para minimizar as perdas hidráulicas que ocorrem com a mudança de direção do escoamento na entrada da bomba Tesla, Yu (2015, p. 89), sugere usar discos não-planos (figura 3.0.6), e desenvolve uma parametrização para esse caso.

Figura 3.0.6 - Bomba Tesla com discos não-planos



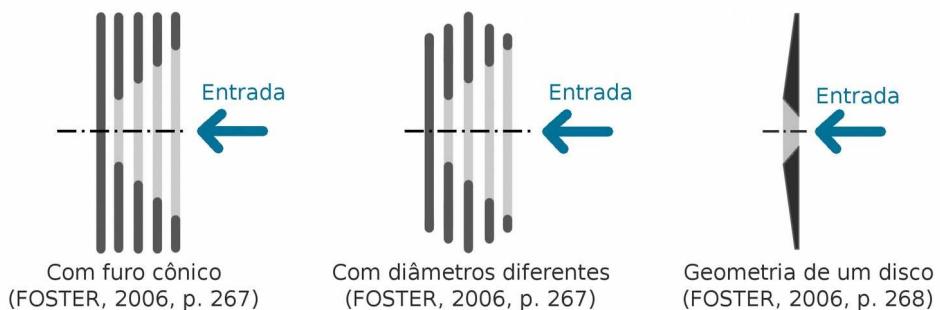
Fonte: Própria (baseado em Yu (2015, p. 92))

Choon et al. (2011) realizou simulação em 3D e otimização de turbina Tesla em elementos finitos, com caracterização experimental, de forma a otimizar o número de discos, espaçamento entre discos, diâmetro dos discos e tamanho da voluta. Ele conseguiu chegar a valores otimizados dados por (CHOON et al., 2011, p. 479): 13 discos, 0,32 mm de espaçamento entre discos, 140 mm de diâmetro externo dos discos e 150 mm de diâmetro da voluta. Com isso, conseguiu alcançar uma eficiência de 10,7 %, com um torque de 0,0330 N.m.

Foster (2006) sugeriu, no final do seu trabalho, duas configurações de diâmetros dos discos da bomba Tesla e um formato diferente de disco (figura 3.0.7). A entrada em furo côncico foi proposta por se assemelhar a métodos empregados em

sistemas de encanamento, enquanto que os diâmetros diferentes foram propostos por afastar o disco de diâmetro maior da parede, o que poderia reduzir a tensão de cisalhamento na parede e melhorar o desempenho do rotor.

Figura 3.0.7 - Configurações de bomba Tesla analisadas por Foster (2006)

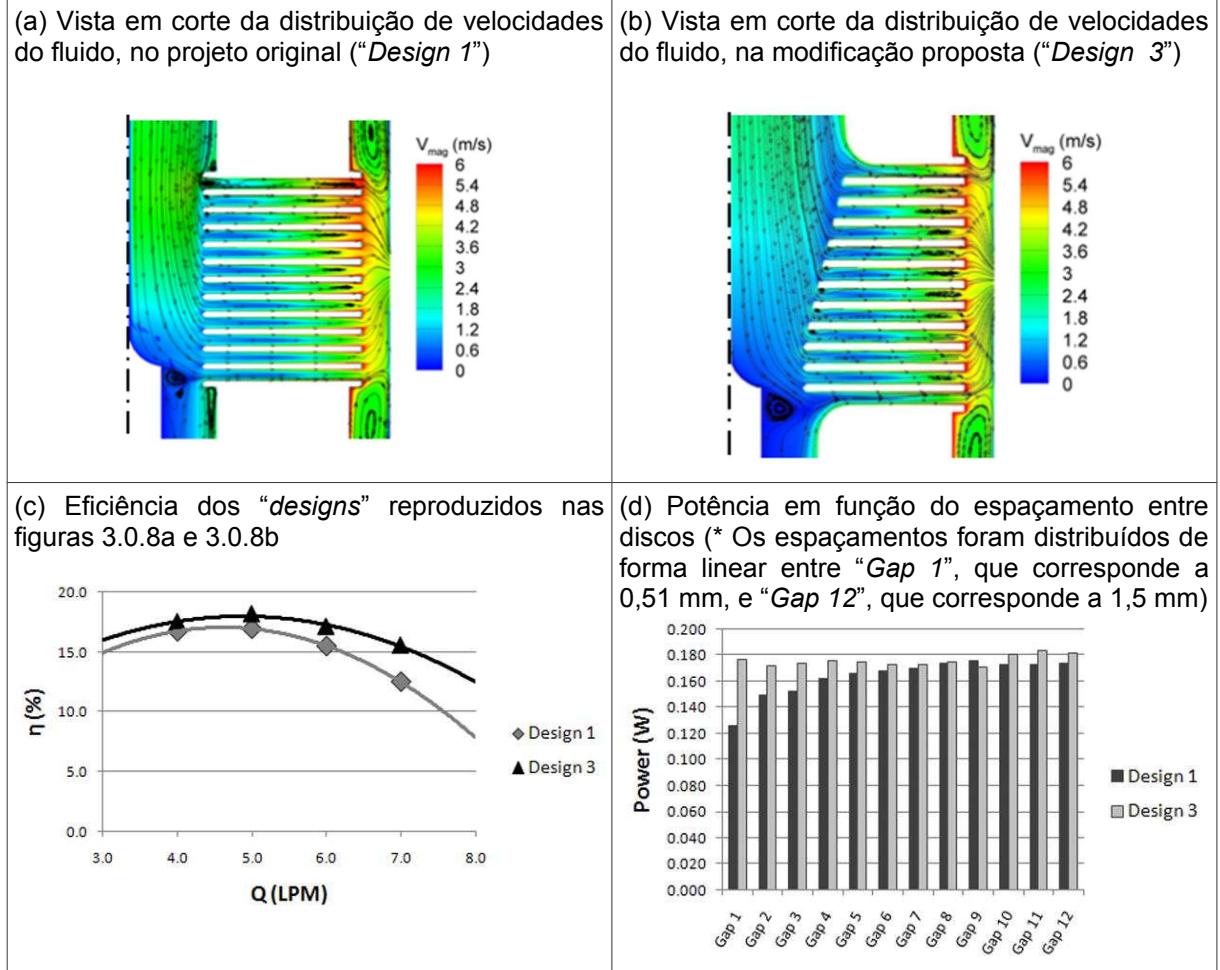


Fonte: Própria (baseado em Foster (2006, p. 267 ~ 268))

Segundo Foster (2006, p. 280, 283), Crawford e Rice (1974) indicaram que a eficiência calculada é máxima quando a razão entre o diâmetro do furo e o diâmetro externo do disco de uma bomba Tesla é de aproximadamente 5.

Em Medvitz et al. (2011), utilizou-se a abordagem DFC para avaliar um formato diferente de discos de bomba Tesla (figuras 3.0.8a, 3.0.8b e 3.0.8c), assim como o espaçamento entre esses discos (figura 3.0.8d). Chegou-se à conclusão de que, utilizando-se o formato de um furo cônico no eixo da bomba Tesla, a eficiência aumenta levemente para vários dos espaçamentos entre discos com relação à bomba Tesla original.

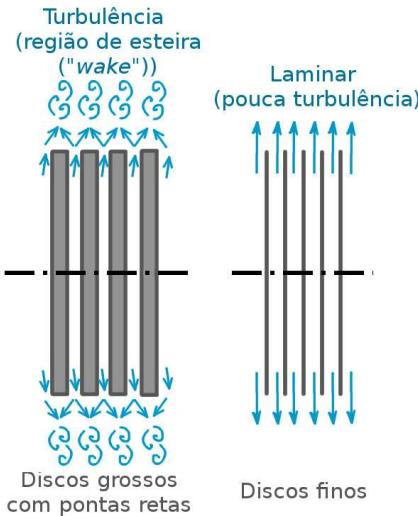
Figura 3.0.8 - Análises DFC de espaçamento entre discos, formato e potência (MEDVITZ et al., 2011)



Fonte: Medvitz et al. (2011, p. 15 a 17)

A espessura dos discos deve ser pequena para garantir que não se forme uma região de esteira (“wake”) nas bordas (figura 3.0.9). Foster (2006, p. 145), sugeriu que as bordas dos discos fossem afinadas (“chanfradas”) no caso de utilizar discos grossos, de forma a reduzir a turbulência gerada.

Figura 3.0.9 - Efeito de turbulência nas bordas dos discos



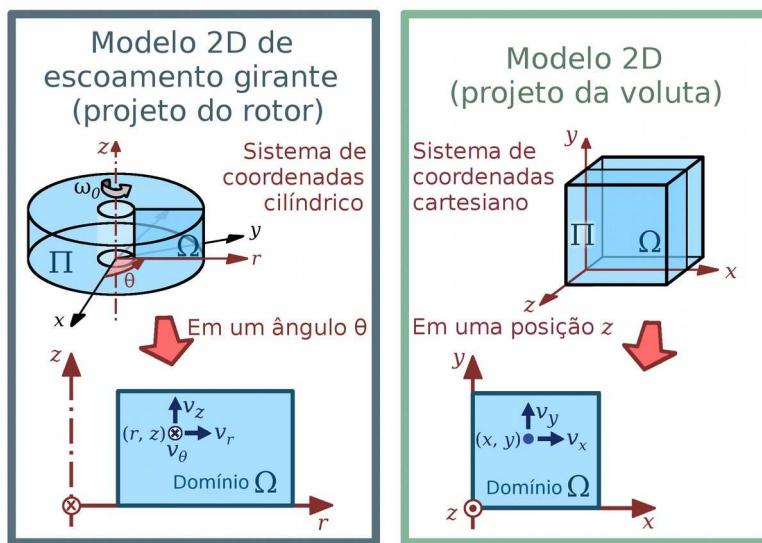
Fonte: Própria (baseado em Foster (2006, p. 145))

A utilização de métodos de otimização no projeto de bombas é uma opção interessante, porque é capaz de garantir melhoria de desempenho. A otimização em bombas foi apresentada primeiramente por Antaki et al. (1995), em que se desenvolveu uma bomba rotativa de forma a satisfazer critérios de eficiência hidrodinâmica, tensão de cisalhamento, vorticidade e dissipação viscosa. Outros desenvolvimentos e métodos também foram elaborados para bombas rotativas (ROMERO e SILVA, 2014) (SÁ, 2016). Otimizações em equipamentos que operam sob o princípio Tesla também foram realizados, como para quantidade, espaçamento e tamanho dos discos (CHOON et al., 2011).

## 4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para o projeto do rotor da bomba Tesla, é utilizado um modelo 2D de escoamento girante (em coordenadas cilíndricas), e, para o projeto da voluta da bomba Tesla, é utilizado um modelo 2D (em coordenadas cartesianas). Esses dois modelos estão ilustrados na figura 4.0.1. A diferença entre esses dois modelos é que o modelo 2D de escoamento girante possui componente de velocidade em uma terceira direção (direção tangencial ( $\theta$ )).

Figura 4.0.1 - Modelos utilizados nos projetos do rotor e da voluta da bomba Tesla



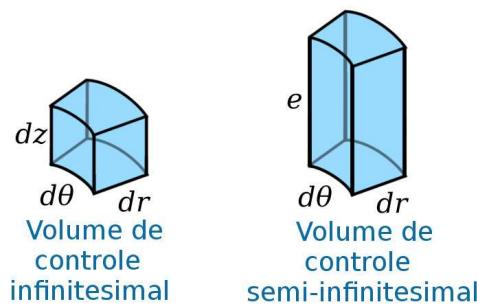
Fonte: Própria

Para o desenvolvimento das equações que regem o rotor de dispositivos Tesla (ver a figura 4.0.2), existem basicamente duas vertentes:

- Desenvolvimento a partir de volume de controle infinitesimal (i.e. pelas equações de Navier-Stokes) (SENGUPTA e GUHA, 2012) (ALLEN, 1990) (ROMANIN, 2012) (PUZYREWSKI e TESCH, 2010).
- Desenvolvimento a partir de volume de controle semi-infinitesimal (com os elementos sendo infinitesimais radialmente e tangencialmente, mas não em espessura) (SCHOSSER et al., 2014).

A abordagem utilizada neste trabalho é a primeira, por meio de volume de controle infinitesimal, que é mais genérica. Após obter a forma forte do problema, é deduzida a forma fraca do problema (utilizada no Método de Elementos Finitos). Assim, são apresentadas algumas variáveis de interesse em análise da bomba Tesla e é formulado o problema de otimização topológica.

Figura 4.0.2 - Volumes de controle infinitesimal e semi-infinitesimal  
(\*  $e$  é o espaçamento (não-infinitesimal) entre dois discos consecutivos do dispositivo Tesla)



Fonte: Própria

Na modelagem de fluidos, há 4 equações vetoriais básicas (expressas na forma integral ou diferencial) que podem ser consideradas (WHITE, 2011):

- Equação da continuidade: Conservação de massa.
- Equação da quantidade de movimento linear: Movimento do fluido.
- Equação da quantidade de movimento angular (“momento da quantidade de movimento”, “momento angular”): Torques atuantes. Só existe na forma integral, porque na forma diferencial resulta no resultado conhecido de que as tensões de cisalhamento no fluido são simétricas (WHITE, 2011, p. 245).
- Equação da energia (1<sup>a</sup> Lei da Termodinâmica): Transferência de calor.

A modelagem foi feita a partir da forma diferencial das equações de fluidos, sendo que, como a bomba Tesla é uma bomba de fluxo, as transferências de calor foram desprezadas. Assim, foram consideradas somente as equações da continuidade e da quantidade de movimento linear.

As equações diferenciais parciais (EDPs) mencionadas acima para fluidos são EDPs semilineares, em que os coeficientes das derivadas de ordem superior (no

caso, segunda ordem) não dependem da solução (i.e., não dependem nem da velocidade, nem da pressão e nem da temperatura).

A seguir, é apresentado o desenvolvimento teórico para modelagem do rotor da bomba Tesla. A modelagem da voluta da bomba Tesla é análoga e é apresentada no “Apêndice C – Equações para o modelo 2D”.

#### 4.1 MODELAGEM DO ROTOR DA BOMBA TESLA

O escoamento no rotor de uma bomba Tesla ocorre por meio do movimento rotativo de fluido entre dois discos, com forças de Coriolis e centrífuga (inercial).

Para modelagem do fluido, está sendo assumido que ele seja *newtoniano* (i.e., que as variações de viscosidade dinâmica sejam desprezíveis e sigam a Lei de

Newton da Viscosidade,  $\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy}$ ) e incompressível.

Para o escoamento, está sendo assumido que ele ocorra em regime permanente (regime estacionário) e seja laminar (i.e., com número de Reynolds baixo).

##### 4.1.1 Equação da continuidade

Segundo Munson et al. (2004, p. 272), a equação da continuidade em sua forma diferencial é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}}) = 0 \quad (4.1.1)$$

em que

$\rho$  : Densidade (massa específica) do fluido.

$\mathbf{v}_{\text{abs}}$  : Velocidade absoluta de uma partícula do fluido (campo de velocidades).

Considerando-se fluido incompressível (densidade do fluido constante),

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}} = 0 \quad (4.1.2)$$

#### 4.1.2 Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes correspondem às equações da quantidade de movimento linear (“*linear momentum equation*”, “equação do momento linear”) na forma diferencial, para fluido **newtoniano** e **incompressível**, e **variações desprezíveis de viscosidade** (o que significa número de Reynolds baixo), são dadas pela seguinte equação vetorial, que possui componentes para cada direção do espaço 3D (GURTIN, 1981, p.147 a 149) (ROMERO e SILVA, 2014, p. 279) (SÁ, 2016, p. 25) (WHITE, 2011, p. 241) (MUNSON et al., 2004, p. 311):

$$\rho \cdot \frac{D \mathbf{v}_{\text{abs}}}{Dt} = -\nabla p + \mu \cdot \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}_{\text{abs}} + \nabla \mathbf{v}_{\text{abs}}^T) + \rho \cdot \mathbf{f} \quad (4.1.3)$$

em que

$\rho$  : Densidade (massa específica) do fluido.

$\mathbf{v}_{\text{abs}}$  : Velocidade absoluta de uma partícula do fluido (campo de velocidades).

$\nabla p$  : Gradiente de pressão absoluta.

$\mu$  : Viscosidade dinâmica (coeficiente de viscosidade).

$\rho \cdot \mathbf{f}$  : Força atuando no fluido (por unidade de volume). Se for somente a força da gravidade, então  $\rho \cdot \mathbf{f} = \rho \cdot \mathbf{g} = \rho \cdot g \cdot \mathbf{k}$  ( $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$  : aceleração da gravidade).

$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}_{\text{abs}} + \nabla \mathbf{v}_{\text{abs}}^T) = \nabla^2 \mathbf{v}$  : Laplaciano de  $\mathbf{v}_{\text{abs}}$  (Laplaciano de vetor). Essa igualdade pode ser obtida, por exemplo, desenvolvendo-se  $\nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}_{\text{abs}} + \nabla \mathbf{v}_{\text{abs}}^T)$  em coordenadas cartesianas e substituindo três equações

decorrentes da equação da continuidade:  $\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}})}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}})}{\partial y} = 0$  e  $\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}})}{\partial z} = 0$ .

A derivada substancial (derivada material) é dada por

$$\frac{D \mathbf{v}_{\text{abs}}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{abs}}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{\text{abs}} \quad (4.1.4)$$

em que

$\frac{\partial}{\partial t}$  : Derivada local.

$(\mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot \nabla)$  : Derivada convectiva.

Como  $(\mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{\text{abs}} = \mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\text{abs}} = \nabla \mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}}$  e, considerando-se regime permanente (i.e.,  $\frac{\partial \mathbf{v}_{\text{abs}}}{\partial t} = 0$ ),

$$\frac{D \mathbf{v}_{\text{abs}}}{Dt} = \nabla \mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}} \quad (4.1.5)$$

#### 4.1.3 Sistema de referência rotativo

Para facilitar a visualização de padrões no escoamento tangencial entre os discos, pode-se utilizar um referencial em rotação (referencial relativo) para avaliar as velocidades, analogamente ao feito por Romero e Silva (2014, p. 272) para bomba centrífuga. Desse modo, é como se a rotação dos discos estivesse parada e a carcaça rotacionando durante a simulação. Além disso, usando referencial relativo em otimização topológica, a distribuição de material sobre os discos é dada como se fosse com velocidade nula.

A **velocidade absoluta** (com relação a um referencial inercial), para escoamento rotativo, é dada por (WHITE, 2011, p. 167):

$$\mathbf{v}_{\text{abs}} = \mathbf{v}_{\text{ref}} + \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{s} \quad (4.1.6)$$

em que

$\mathbf{v}_{\text{ref}} = \mathbf{0}$  : Velocidade da origem do sistema de coordenadas do referencial relativo. É igual a zero, porque essa origem está sendo considerada no centro de rotação.

$\mathbf{v}$  : Velocidade relativa.

$\mathbf{v}_{\text{arr}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{s}$  : Velocidade de arrastamento.

$\boldsymbol{\omega}$  : Velocidade angular de arrastamento.

$\mathbf{s}$  : Vetor posição.

A **aceleração absoluta** (com relação a um referencial inercial), para escoamento rotativo, é dada por (WHITE, 2011, p. 168):

$$\mathbf{a}_{\text{abs}} = \mathbf{a}_{\text{ref}} + \mathbf{a} + 2 \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{s}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{s} \quad (4.1.7)$$

em que

$\mathbf{a}_{\text{abs}} = \frac{D\mathbf{v}_{\text{abs}}}{Dt}$  : Aceleração absoluta.

$\mathbf{a}_{\text{ref}} = \mathbf{0}$  : Aceleração da origem do sistema de coordenadas do referencial relativo. É igual a zero, porque essa origem está no centro de rotação.

$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  : Aceleração relativa, obtida de forma análoga à equação (4.1.5).

$\mathbf{a}_{\text{Coriolis}} = 2 \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}$  : Aceleração de Coriolis.

$\mathbf{a}_{\text{centrípeta}} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{s})$  : Aceleração centrípeta.

$\mathbf{a}_{\text{tangencial}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{s}$  : Aceleração tangencial.

Considerado-se regime permanente,

$$\mathbf{a}_{tangencial} = \dot{\omega} \wedge \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (4.1.8)$$

Portanto, a equação (4.1.7) fica

$$\frac{D \mathbf{v}_{abs}}{Dt} = \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2 \cdot \omega \wedge \mathbf{v} + \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{s}) \quad (4.1.9)$$

Substituindo-se (4.1.9) nas equações de Navier-Stokes (equação (4.1.3)), obtém-se:

$$\rho \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \cdot \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}_{abs} + \nabla \mathbf{v}_{abs}^T) + \rho \cdot \mathbf{f} - 2 \cdot \rho \cdot \omega \wedge \mathbf{v} - \rho \cdot \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{s}) \quad (4.1.10)$$

Substituindo-se (4.1.6) em  $\nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}_{abs} + \nabla \mathbf{v}_{abs}^T)$ ,

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}_{abs} + \nabla \mathbf{v}_{abs}^T) = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \nabla \cdot (\nabla (\omega \wedge \mathbf{s}) + \nabla (\omega \wedge \mathbf{s})^T) \quad (4.1.11)$$

Como  $\omega$  é constante e as três coordenadas do vetor posição  $\mathbf{s}$  são independentes, o termo  $\nabla \cdot (\nabla (\omega \wedge \mathbf{s}) + \nabla (\omega \wedge \mathbf{s})^T)$  é igual a zero. Assim,

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}_{abs} + \nabla \mathbf{v}_{abs}^T) = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \quad (4.1.12)$$

Substituindo-se (4.1.12) em (4.1.10), obtém-se as **equações de Navier-Stokes para sistema de referência rotativo**:

$$\rho \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \cdot \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \rho \cdot \mathbf{f} - 2 \cdot \rho \cdot \omega \wedge \mathbf{v} - \rho \cdot \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{s}) \quad (4.1.13)$$

em que

$f_{coriolis} = - 2.\rho.(\omega \wedge v)$  : Força de Coriolis por unidade de volume.

$f_{centrifuga} = - \rho.\omega \wedge (\omega \wedge s)$  : Força de inércia centrífuga por unidade de volume.

Como a **equação da continuidade** é válida em referencial relativo, pode-se reescrever a equação (4.1.2) como

$$\boxed{\nabla \cdot v = 0}$$

(4.1.14)

#### 4.1.4 Tensor de tensões

O tensor de tensões é dado por:

$$T = 2.\mu.\epsilon - p.I$$

(4.1.15)

em que

$\mu$  : Viscosidade dinâmica (coeficiente de viscosidade).

$\epsilon = \frac{1}{2}.(\nabla v + \nabla v^T)$  : Tensor de deformação viscosa.

$p$  : Pressão.

$I$  : Matriz identidade.

Substituindo-se (4.1.15) em (4.1.13), obtém-se

$$\boxed{\rho.\nabla v \cdot v = \nabla \cdot T + \rho.f - 2.\rho.(\omega \wedge v) - \rho.\omega \wedge (\omega \wedge s)}$$

(4.1.16)

#### 4.1.5 Sistema de coordenadas cilíndrico

Utilizando um sistema de coordenadas cilíndrico, tem-se:

$$\text{Velocidade angular em torno do eixo } z: \boldsymbol{\omega} = \omega_0 \cdot \mathbf{e}_z \quad (4.1.17)$$

$$\text{Posição: } \mathbf{s} = (r, \theta, z) = r \cdot \mathbf{e}_r + r \cdot \theta \cdot \mathbf{e}_\theta + z \cdot \mathbf{e}_z \quad (4.1.18)$$

$$\text{Velocidade: } \mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z) = v_r \cdot \mathbf{e}_r + v_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta + v_z \cdot \mathbf{e}_z \quad (4.1.19)$$

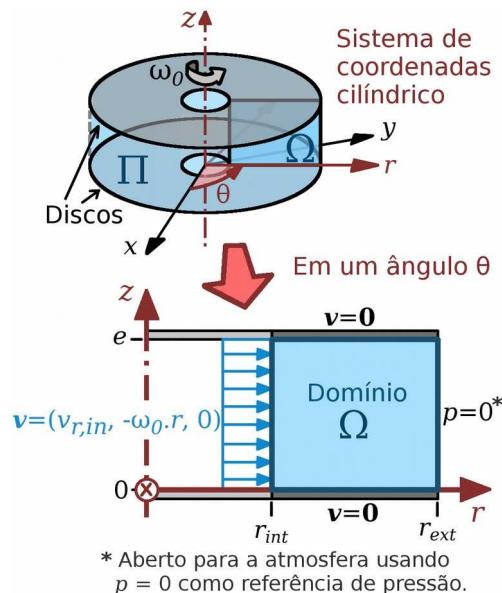
$$\text{Gradiente da velocidade: } \nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.1.20)$$

$$\text{Divergente da velocidade: } \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (4.1.21)$$

#### 4.1.6 Condições de contorno para o modelo de 2 discos da bomba Tesla

Os domínios computacionais (2D:  $\Omega$  e 3D:  $\Pi$ ) e as condições de contorno para 2 discos uma bomba Tesla podem ser vistos na figura 4.1.1, que é similar à figura 3.0.4.

Figura 4.1.1 - Domínios computacionais 2D e 3D e condições de contorno para o modelo de 2 discos da bomba Tesla



\* Aberto para a atmosfera usando  $p = 0$  como referência de pressão.

Fonte: Própria

As **condições de contorno** para a bomba Tesla indicadas na figura 4.1.1 são:

→ Entrada de fluido: De forma análoga a bombas de fluxo centrífugas, em que, para máxima eficiência, a entrada de fluido deve ser radial (BRAN e SOUZA, 1969, p. 104), pode ser utilizada uma entrada de fluido uniforme do tipo:

$$\mathbf{v}(r = r_{\text{int}}) = (v_{r,\text{in}}, -\omega_0 \cdot r, 0) \quad (4.1.22)$$

Utilizando-se  $-\omega_0 \cdot r$  como a velocidade tangencial relativa de entrada, a velocidade tangencial absoluta de entrada será nula (i.e., o fluido entra sem rotação).

→ Princípio da aderência completa (do não-escorregamento) (“*no-slip condition*”) nas superfícies dos discos:

$$\mathbf{v}(z = 0) = (0, 0, 0) \text{ e } \mathbf{v}(z = e) = (0, 0, 0) \quad (4.1.23)$$

em que

$e$  : Espessura do domínio no eixo  $z$  (i.e., é o espaçamento entre os discos).

→ Saída de fluido: Assumindo que a saída da bomba esteja conectada direto na atmosfera, a pressão relativa será nula (i.e., pressão absoluta = pressão atmosférica). Como a pressão absoluta só aparece na forma de diferença (i.e., não para cálculo de propriedade de fluido) nas equações de Navier-Stokes ( $\nabla p$ ), pode-se utilizar o seu valor como sendo o da pressão relativa, ou seja,

$$p(r = r_{\text{ext}}) = 0 \quad (4.1.24)$$

Uma situação mais realística da saída de fluido para a atmosfera seria a de considerar tensão nula na superfície livre da saída (“tensão livre”) ao invés de pressão nula, o que significa que, no contorno, a componente de tensão na direção normal ao domínio será nula ( $T \cdot n = 0$ ). Isso tem o efeito de anular a integral de contorno que surge na equação (4.2.9). Segundo Elman et al. (2005, p. 215), isso significa dizer que a pressão média na saída é nula (condição de contorno fraca (de Neumann, no caso)). A condição de contorno de pressão nula, por outro lado, impõe que o valor de pressão em cada ponto da saída deve ser nulo (condição de contorno forte (de Dirichlet)). Apesar de ser uma condição de contorno mais forte e não ser necessária para resolver o problema, foi escolhido utilizar  $p = 0$  pelo fato dela servir de referência para os valores de pressão na malha. Esse estabelecimento de uma referência ocorre porque, na equação (4.1.3), a pressão só aparece na forma de gradiente, o que deixa o seu nível de referência indefinido. Observou-se que a diferença de resultados entre utilizar uma condição de contorno de pressão nula ou de tensão nula em simulações da bomba Tesla da figura 4.1.1 é pequena, apesar do resíduo do método numérico diminuir um pouco mais rápido no caso de tensão nula.

Se for considerado um modelo mais complexo (i.e., com mais discos), a presença da carcaça (paredes paradas) pode ter que ser modelada. Assim, a condição de contorno de paredes paradas (no referencial absoluto), é dada por uma velocidade tangencial relativa de  $-\omega_0 \cdot r$ .

Para efeito de cálculo do tensor de tensões, tem-se que o vetor normal à malha 2D deve ter três componentes: duas componentes perpendiculares às fronteiras do domínio 2D ( $n_r$  e  $n_z$ ), e uma componente perpendicular ao domínio 2D, que deve ser nula ( $n_\theta = 0$ ), pelo próprio fato de ser um domínio 2D.

## 4.2 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

As soluções aproximadas buscadas para velocidade ( $v$ ) e pressão ( $p$ ) (variáveis dependentes) das Equações Diferenciais Parciais (EDP) (4.1.14) e (4.1.16) são combinações lineares dos pontos de interpolação (nós)  $j$ :

$$\mathbf{v}(\mathbf{s}) \approx \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^n \phi_j(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{v}_j \quad (4.2.1)$$

$$p(\mathbf{s}) \approx \tilde{p}(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^m \chi_j(\mathbf{s}) \cdot p_j \quad (4.2.2)$$

em que

$\mathbf{v}$  e  $p$  : Soluções exatas das equações diferenciais.

$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{s})$  e  $\tilde{p}(\mathbf{s})$  : Soluções aproximadas das equações diferenciais.

$\phi_j(\mathbf{s})$  ,  $\chi_j(\mathbf{s})$  : Funções de forma (funções interpoladoras).

$\mathbf{v}_j$  e  $p_j$  : Valores nos pontos do elemento utilizados para interpolar a velocidade e a pressão, respectivamente (“valores nodais”).

$n$  e  $m$  : Números de pontos do elemento utilizados para interpolar a velocidade e a pressão, respectivamente.

O modelo de elementos finitos das equações (4.1.14) e (4.1.16) utilizado é a formulação mista (“formulação velocidade-pressão”) (REDDY, 2006, p. 579).

Para aproximar as equações, seguiu-se o Método dos Resíduos Ponderados (MRP, Weighted-Residual Method, WRM), em conjunto com o Método de Galerkin.

#### 4.2.1 Forma fraca do problema 3D

Para se chegar na forma fraca do problema a partir das equações da forma forte do problema (equações (4.1.14) e (4.1.16)) , deve-se variacionar as equações diferenciais (4.1.14) e (4.1.16), isto é, multiplicar cada uma delas por um variacional (função peso) ( $\delta p$  e  $\delta \mathbf{v}$  , respectivamente), e integrá-las no domínio 3D inteiro (  $\Pi$  ). Como o valor das funções peso é arbitrário, existem várias escolhas possíveis para elas. No caso, foi escolhido o Método de Galerkin, em que em que as funções peso são iguais às funções de forma.

As funções peso correspondentes a  $\delta p$  e  $\delta v$  serão representadas, para

cada ponto de interpolação (nós)  $j$ , por  $w_{p,j}$  e  $w_{v,j} = \begin{bmatrix} w_{v,j,r} \\ w_{v,j,\theta} \\ w_{v,j,z} \end{bmatrix}$  (\* pelo Método de Galerkin,  $w_{p,j} = \chi_j$  e  $w_{v,j,r} = w_{v,j,\theta} = w_{v,j,z} = \phi_j$ , das equações (4.2.1) e (4.2.2)).

Multiplicando-se as equações diferenciais (equações (4.1.14) e (4.1.16)) pelas funções peso correspondentes e integrando-as no domínio 3D ( $\Pi$ ), obtém-se as funções integrais residuais ponderadas para cada função peso:

$$R_{c,j} = \int_{\Pi} [\nabla \cdot \mathbf{v}] \cdot w_{p,j} \cdot d\Pi \quad (4.2.3)$$

$$R_{m,j} = \int_{\Pi} [\rho \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{T} - \rho \cdot \mathbf{f} + 2 \cdot \rho \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}) + \rho \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{s})] \cdot w_{v,j} \cdot d\Pi \quad (4.2.4)$$

em que o índice subscrito  $c$  significa “equação da continuidade” e o índice subscrito  $m$  significa “equação da quantidade de movimento linear” (equações de Navier-Stokes).

Para evitar a presença de derivadas de segunda ordem na equação (4.2.4), desdobra-se o termo  $\int_{\Pi} (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot w_{v,j} \cdot d\Pi$  em derivadas de primeira ordem. O divergente do produto da matriz  $\mathbf{T}$  com o vetor  $w_{v,j}$  pode ser obtido pela regra do produto:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot w_{v,j}) &= (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot w_{v,j} + \mathbf{T} \cdot (\nabla w_{v,j}) \\ \Rightarrow (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot w_{v,j} &= -\mathbf{T} \cdot (\nabla w_{v,j}) + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot w_{v,j}) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Integrando-se a equação acima em  $\Pi$ , obtém-se (integração por partes):

$$\int_{\Pi} (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot w_{v,j} \cdot d\Pi = - \int_{\Pi} \mathbf{T} \cdot (\nabla w_{v,j}) \cdot d\Pi + \int_{\Pi} \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot w_{v,j}) \cdot d\Pi \quad (4.2.6)$$

O Teorema de Gauss da Divergência é dado por:

$$\int_{\Pi} \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}_{v,j}) d\Pi = \oint_{\Gamma_{\Pi}} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}_{v,j}) d\Gamma_{\Pi} \quad (4.2.7)$$

Substituindo-se a equação (4.2.7) em (4.2.6), consegue-se separar o termo das equações que depende de condições de contorno, evitando a presença de derivadas de segunda ordem nas equações:

$$\int_{\Pi} \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}_{v,j}) \cdot d\Pi = - \int_{\Pi} \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{w}_{v,j}) \cdot d\Pi + \oint_{\Gamma_{\Pi}} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}_{v,j}) \cdot \mathbf{n} \cdot d\Gamma_{\Pi} \quad (4.2.8)$$

em que  $\Gamma_{\Pi}$  é o contorno (“caminho fechado”) do domínio  $\Pi$ , que também pode ser representado por  $\partial\Pi$ .

Aplicando-se a equação (4.2.8) na equação (4.2.4), obtém-se:

$$R_{m,j} = \int_{\Pi} [\rho \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{w}_{v,j}) - \rho \cdot \mathbf{f} + 2 \cdot \rho \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}) + \rho \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{s})] \cdot \mathbf{w}_{v,j} \cdot d\Pi$$

$$- \oint_{\Gamma_{\Pi}} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}_{v,j}) \cdot \mathbf{n} \cdot d\Gamma_{\Pi}$$

(4.2.9)

Na integral de contorno da equação (4.2.9), percebe-se que, se valores constantes para as velocidades forem impostos em partes do contorno (como nas superfícies dos discos ou em paredes), os pesos de velocidade serão nulos ( $\mathbf{w}_{v,j} = \mathbf{0}$ ), porque eles correspondem a um variacional  $\delta \mathbf{v}$  (se não há variação de  $\mathbf{v}$ ,  $\delta \mathbf{v} = \mathbf{0}$  e, portanto,  $\mathbf{w}_{v,j} = \mathbf{0}$ ).

#### 4.2.2 Simplificação para o modelo 2D de escoamento girante

Assumindo-se modelo 2D de escoamento girante (“2D swirl flow model”, “2D axisymmetric model with swirl”, “escoamento axissimétrico com giro”), o problema

pode ser tratado como se as coordenadas fossem bidimensionais (2D), mas com componentes tridimensionais de velocidade, configurando um problema **2,5D**. Sendo o domínio 2D, a velocidade independe do ângulo  $\theta$  (i.e.,  $\frac{\partial(\ )}{\partial\theta} = 0$ ). Assim, fica-se com:

$$\text{Posição: } \mathbf{s} = (r, 0, z) = r \cdot \mathbf{e}_r + z \cdot \mathbf{e}_z \quad (4.2.10)$$

$$\text{Velocidade: } \mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z) = v_r \cdot \mathbf{e}_r + v_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta + v_z \cdot \mathbf{e}_z \quad (4.2.11)$$

$$\text{Conversão - domínio 3D} \leftrightarrow \text{domínio 2D: } d\Pi = 2\pi r d\Omega \quad (4.2.12)$$

$$d\Pi = 2\pi r d\Gamma \quad (4.2.13)$$

$$\text{Tensor de tensões: } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} & \mu \left( -\frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) & \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ \mu \left( -\frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) & -p + 2\mu \frac{v_r}{r} & \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) & \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} & -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.2.14)$$

Convertendo-se as equações (4.2.3) e (4.2.9) para domínio 2D e retirando-se a constante  $2\pi$  das funções integrais residuais ponderadas (por ser uma constante e, portanto, não influenciar na resolução do problema variacional), tem-se:

$$\boxed{\hat{R}_{c,j} = \int_{\Omega} [\nabla \cdot \mathbf{v}] \cdot \mathbf{w}_{p,j} \cdot r d\Omega} \quad (4.2.15)$$

$$\boxed{\hat{R}_{m,j} = \int_{\Omega} [\rho \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{w}_{v,j}) - \rho \cdot \mathbf{f} + 2\rho \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}) + \rho \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{s})] \cdot \mathbf{w}_{v,j} \cdot r d\Omega - \oint_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}_{v,j}) \cdot \mathbf{n} \cdot r d\Gamma} \quad (4.2.16)$$

Os operadores diferenciais das equações acima são definidos com relação a coordenadas cilíndricas (ver “Apêndice A – Desenvolvimento detalhado do modelo 2D de escoamento girante”).

Nas equações (4.2.15) e (4.2.16), pelo Método de Galerkin, as funções peso são iguais às funções de forma:  $w_{p,j} = \chi_j$  e  $w_{v,j,r} = w_{v,j,\theta} = w_{v,j,z} = \phi_j$ . Além disso, por simplicidade, pode ser assumido que não hajam forças de corpo atuando (i.e.,  $\mathbf{f} = (f_r, f_\theta, f_z) = (0, 0, 0)$ ). Se os discos estiverem na horizontal, a força da gravidade estaria atuando simetricamente, ou seja,  $\mathbf{f} = (f_r, f_\theta, f_z) = (0, 0, -g)$ . Pelo fato de ser um modelo axissimétrico, não é possível considerar a força da gravidade atuando em outra direção.

No modelo 2D de escoamento girante, como a malha é 2D, a componente tangencial do vetor normal é nula ( $n_\theta = 0$ ). Assim, o vetor normal passa a ter somente 2 componentes não-nulas ( $\mathbf{n} = (n_r, 0, n_z)$ ).

O desenvolvimento detalhado (termo-a-termo) das equações (4.2.15) e (4.2.16) está no “Apêndice A – Desenvolvimento detalhado do modelo 2D de escoamento girante”.

#### 4.2.3 Forma fraca do problema para o modelo 2D de escoamento girante

O problema variacional (forma fraca) consiste na busca do valor mínimo dos funcionais das equações (4.2.15) e (4.2.16):

$$\hat{R}_{c,j} = 0 \quad (4.2.17)$$

$$\hat{R}_{m,j} = 0 \quad (4.2.18)$$

Na formulação mista (chamada, no caso, de “formulação velocidade-pressão”), como as funções peso ( $w_{p,j}$  e  $w_{v,j}$ ) são independentes umas das outras (i.e., os termos que elas multiplicam devem ser zero independentemente uma equação da outra), pode-se somar as duas equações acima, sem perda de generalidade, formando uma única equação para o problema variacional (forma fraca):

$$F_j = \hat{R}_{c,j} + \hat{R}_{m,j} = 0 \quad (4.2.19)$$

Pode-se separar a equação acima em duas componentes (REDDY, 2006, p. 65): funcional bilinear ( $B_j(\mathbf{v}, p, \mathbf{w}_j)$ ), que depende das variáveis de estado e da função peso, e linear ( $\ell_{p,j}(\mathbf{w}_j)$ ), que depende somente da função peso. Assim, o problema variacional ficaria enunciado como:

$$B_j(\mathbf{v}, p, \mathbf{w}_j) = \ell_j(\mathbf{w}_j) \quad (4.2.20)$$

#### 4.2.4 Resolução da forma fraca do problema

As equações acima podem resolvidas por meio de um sistema de equações algébricas matricial. A partir das equações (4.2.1) e (4.2.2), tem-se que as soluções aproximadas podem ser representadas por meio de matrizes:

$$v_r(\mathbf{s}) \approx \sum_{j=1}^n \phi_j(\mathbf{s}) \cdot v_{r,j} = \boldsymbol{\phi}^T \cdot \mathbf{v}_r \quad (4.2.21)$$

$$v_\theta(\mathbf{s}) \approx \sum_{j=1}^n \phi_j(\mathbf{s}) \cdot v_{\theta,j} = \boldsymbol{\phi}^T \cdot \mathbf{v}_\theta \quad (4.2.22)$$

$$v_z(\mathbf{s}) \approx \sum_{j=1}^n \phi_j(\mathbf{s}) \cdot v_{z,j} = \boldsymbol{\phi}^T \cdot \mathbf{v}_z \quad (4.2.23)$$

$$p(\mathbf{s}) \approx \sum_{j=1}^m \chi_j(\mathbf{s}) \cdot p_j = \boldsymbol{\chi}^T \cdot \mathbf{p} \quad (4.2.24)$$

em que

$$\mathbf{v}_r = \begin{bmatrix} v_{r,1} \\ v_{r,2} \\ v_{r,3} \\ \vdots \\ v_{r,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_\theta = \begin{bmatrix} v_{\theta,1} \\ v_{\theta,2} \\ v_{\theta,3} \\ \vdots \\ v_{\theta,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_z = \begin{bmatrix} v_{z,1} \\ v_{z,2} \\ v_{z,3} \\ \vdots \\ v_{z,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix}.$$

Vetores de valores nodais.

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \vdots \\ \chi_m \end{bmatrix} : \text{Funções de forma ("funções base").}$$

Se as equações (4.2.21) a (4.2.24) forem substituídas em (4.2.19), é possível montar, de forma análoga a Romero e Silva (2014, p. 276), um sistema de equações algébricas matricial (forma discreta das equações da forma fraca). Essa montagem é descrita no “Apêndice B – Formas discretas no modelo 2D de escoamento girante”, com as equações já adaptadas para otimização topológica. Devido aos termos devidos à convecção ( $\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ ), o sistema matricial resultante não é simétrico e nem linear.

Segundo Logg et al. (2012, p. 386), a formulação velocidade-pressão (formulação mista) das equações de fluidos é um problema de ponto de sela (“*saddle point*”), o que leva a equações matriciais indefinidas. Esse sistema de equações não-linear pode ser resolvido por resolvedores iterativos lineares (LOGG et al., 2012, p. 386), os quais, para as equações de Navier-Stokes, consistem no Método de Newton-Raphson (também chamado de “Método de Newton” e “Método de Newton-Kantorovich”) (POLYAK, 2006).

O método de Newton-Raphson é capaz de resolver o sistema não-linear iterativamente por meio de linearizações sucessivas baseadas na primeira derivada de  $F_j$  do problema variacional (equação (4.2.19)). A grande desvantagem desse método é que a resolução do sistema de equações pode divergir facilmente se a estimativa inicial de valores de  $(\mathbf{v}, p)$  for muito distante da solução. Além disso, pode convergir para diferentes soluções a partir de estimativas iniciais diferentes (efeito da bifurcação de soluções). Assim, para o caso de simular com um referencial relativo, uma escolha é impor, na estimativa inicial, o fluido com velocidade  $-\omega \cdot \mathbf{r}$  (fluido parado no referencial absoluto).

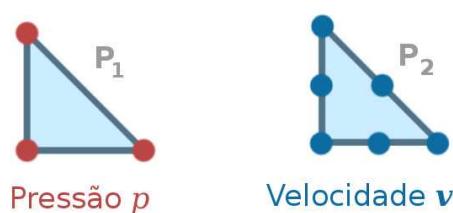
#### 4.2.5 Modelagem do elemento finito

Segundo Langtangen e Logg (2016, p. 62), alguns espaços de elementos finitos não são estáveis para resolver as equações de Navier-Stokes, como usar elementos finitos Lagrangeanos de mesmo grau para ambas a velocidade e a pressão (LOGG et al., 2012, p. 386). Usar espaços instáveis resulta tipicamente em soluções com oscilações espúrias (indesejadas, não-físicas) na pressão (LANGTANGEN e LOGG, 2016, p. 62).

Para a formulação velocidade-pressão (formulação mista) ser estável, as equações de Navier-Stokes devem satisfazer a condição de compatibilidade LBB (Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi) (condição de compatibilidade “inf-sup” aplicada a escoamentos de fluidos) (LANGTANGEN e LOGG, 2016, p. 62) (GUZMÁN, 2012, p. 1) (BREZZI e FORTIN, 1991, p. 57).

Um dos modos mais utilizados para resolver o problema do ponto de sela das equações do problema variacional é utilizar elementos de Taylor-Hood (LANGTANGEN e LOGG, 2016, p. 62). Esses elementos se baseiam em elementos de Lagrange, que possuem interpolação via polinômios de Lagrange (LOGG et al., 2012, p. 98). Elementos de Taylor-Hood consistem em utilizar um elemento  $P_q$  (i.e., elemento de Lagrange com grau  $q$ ) para as componentes da velocidade, e um elemento  $P_{q-1}$  para a pressão, em que  $q \geq 2$  (LOGG et al., 2012, p. 386). Assim, escolhendo-se elementos triangulares (2D) e  $q = 2$ , tem-se que serão utilizados elementos  $P_2$  (superparamétricos) para a velocidade e  $P_1$  (isoparamétricos) para a pressão. Os elementos escolhidos podem ser vistos na figura 4.1.2.

Figura 4.1.2 - Elemento de Taylor-Hood em 2D para pressão e velocidade



Fonte: Própria

Também existem outros tipos de elementos utilizados com a mesma finalidade dos elementos de Taylor-Hood, como os elementos de Crouzeix-Raviart, MINI e CD (LOGG et al., 2012, p. 388) (DONEA e HUERTA, 2003, p. 286).

Além de elementos triangulares (SÁ, 2016, p. 30) (DONEA e HUERTA, 2003, p. 286) (LOGG et al., 2012, p. 386), para problemas com fluidos, também podem ser utilizados elementos quadrados (ROMERO e SILVA, 2014, p. 276) (BORRVAL e PETERSON, 2003, p. 92) (DONEA e HUERTA, 2003, p. 286) (REDDY, 2006, p. 589 e 590).

Nas equações (4.2.21) a (4.2.24), usando-se elementos  $P_2$  para velocidade,  $n = 6$ ; e usando-se elementos  $P_1$  para pressão,  $m = 3$ . Como são 3 componentes de velocidade e 1 componente de pressão, as matrizes de cada elemento na forma discreta matricial das equações da forma fraca devem ser  $21 \times 21$  ( $3 \times 6 + 1 \times 3$ ).

### 4.3 VARIÁVEIS DE CARACTERIZAÇÃO

Por meio da abordagem de volumes e superfícies de controle, é possível definir, para o rotor da bomba Tesla (modelo 2D de escoamento com giro), a vazão volumétrica, a variação de pressão, a carga manométrica suportada, a potência da bomba Tesla, a dissipação de energia e a vorticidade.

Para a voluta (modelo 2D comum), as equações são as mesmas (exceto potência da bomba Tesla, porque a voluta está parada), porém sem o fator  $2\pi r$ .

#### 4.3.1 Vazão volumétrica

A vazão volumétrica é dada por (MUNSON, 2004, p. 187):

$$Q = - \int_{\text{entrada}} \mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot \mathbf{n} \cdot d\Gamma_{\Pi} = \int_{\text{saída}} \mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot \mathbf{n} \cdot d\Gamma_{\Pi} \quad (4.3.1)$$

em que

$\Gamma_\Pi$  : Superfície de controle.

$d\Gamma_\Pi$  : Diferencial da área da superfície de controle.

$\mathbf{v}_{abs}$  : Vetor velocidade absoluta.

$\mathbf{n}$  : Vetor normal a  $dA$ . O seu sentido positivo é apontando para fora do domínio.

$v_{normal} = \mathbf{v}_{abs} \cdot \mathbf{n}$  : Velocidade normal a  $dA$ .

Pode-se passar a equação acima para o sistema de coordenadas cilíndrico axissimétrico, pela equação (4.2.13),

$$d\Gamma_\Pi = 2\pi r d\Gamma \quad (4.3.2)$$

Assim, a equação (4.3.1) fica:

$$Q = - \int_{\text{entrada}} \mathbf{v}_{abs} \cdot \mathbf{n} \cdot 2\pi r d\Gamma = \int_{\text{saída}} \mathbf{v}_{abs} \cdot \mathbf{n} \cdot 2\pi r d\Gamma \quad (4.3.3)$$

A equação (4.3.1) também pode ser escrita como, considerando-se fluido incompressível:

$$Q = \pm \int_{\substack{\text{entrada} \\ \text{ou saída}}} v_{normal} \cdot d\Gamma_\Pi = \pm \left( \frac{\int_{\substack{\text{entrada} \\ \text{ou saída}}} \rho \cdot v_{normal} \cdot d\Gamma_\Pi}{\rho \cdot A_{\substack{\text{entrada} \\ \text{ou saída}}}} \right) \cdot A_{\substack{\text{entrada} \\ \text{ou saída}}} = \pm \bar{v}_{normal} \cdot A_{\substack{\text{entrada} \\ \text{ou saída}}} \quad (4.3.4)$$

em que

$\bar{v}_{normal}$  : Velocidade normal média com relação a  $A_{\substack{\text{entrada} \\ \text{ou saída}}}$  (MUNSON, 2004, p. 187).

$A_{\substack{\text{entrada} \\ \text{ou saída}}} = \int_{\substack{\text{entrada} \\ \text{ou saída}}} d\Gamma_\Pi$  : Área de entrada ou de saída.

### 4.3.2 Variação de pressão

A variação de pressão pode ser calculada pela diferença entre a pressão média na saída e na entrada. Assim,

$$\Delta p = p_{saída} - p_{entrada} = \frac{\int_{saída} p \cdot d\Gamma_{\Pi}}{\int_{saída} d\Gamma_{\Pi}} - \frac{\int_{entrada} p \cdot d\Gamma_{\Pi}}{\int_{entrada} d\Gamma_{\Pi}} \quad (4.3.5)$$

No sistema de coordenadas cilíndrico axissimétrico, pela equação (4.2.13),

$$\Delta p = p_{saída} - p_{entrada} = \frac{\int_{saída} p \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Gamma}{\int_{saída} 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Gamma} - \frac{\int_{entrada} p \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Gamma}{\int_{entrada} 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Gamma} \quad (4.3.6)$$

### 4.3.3 Carga manométrica

Segundo Munson et al. (2004, p. 225) e Borgnakke et al. (2013, p. 161), a **equação da energia (1ª Lei da Termodinâmica)** em sua forma integral é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Pi} e \cdot \rho \cdot d\Pi + \int_{\Gamma_{\Pi}} e \cdot \rho \cdot \mathbf{v}_{abs} \cdot \mathbf{n} \cdot d\Gamma_{\Pi} = \dot{Q}_{\Pi} + \dot{W}_{\Pi} \quad (4.3.7)$$

em que

$\Pi$  : Volume de controle.

$\Gamma_{\Pi}$  : Superfície de controle.

$d\Pi$  : Diferencial do volume de controle.

$d\Gamma_{\Pi}$  : Diferencial da área da superfície de controle.

$e$  : Energia específica do escoamento.

$\rho$  : Densidade (massa específica) do fluido.

$\mathbf{v}_{abs}$  : Vetor velocidade absoluta.

$\mathbf{n}$  : Vetor normal a  $d\Gamma_{\Pi}$ . O seu sentido positivo é apontando para fora do domínio.

$$v_{normal} = \mathbf{v}_{abs} \cdot \mathbf{n} : \text{Velocidade normal a } dA .$$

$\dot{Q}_\Pi$  : Troca de calor líquida no volume de controle (sentido positivo de calor entrando no volume de controle).

$\dot{W}_{vc}$  : Trabalho líquido no volume de controle (sentido positivo de trabalho entrando no volume de controle).

No caso, está sendo considerado regime permanente ( $\frac{\partial}{\partial t} \int_\Pi e \cdot \rho \cdot d\Pi = 0$ ):

$$\int_{\Gamma_\Pi} e \cdot \rho \cdot \mathbf{v}_{abs} \cdot \mathbf{n} \cdot d\Gamma_\Pi = \dot{Q}_\Pi + \dot{W}_\Pi \quad (4.3.8)$$

Segundo Munson et al. (2004, p. 225), a energia específica é dada por:

$$e = u + \frac{p}{\rho} + \frac{v_{abs}^2}{2} + g \cdot h \quad (4.3.9)$$

em que

$u$  : Energia interna do fluido.

$p$  : Pressão no escoamento.

$v_{abs}$  : Velocidade absoluta do escoamento.

$\rho$  : Densidade (massa específica) do fluido.

$g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$  : Aceleração da gravidade.

$h$  : Altura do escoamento.

Substituindo-se (4.3.9) em (4.3.8),

$$\int_{\Gamma_\Pi} \left( u + \frac{p}{\rho} + \frac{v_{abs}^2}{2} + g \cdot h \right) \rho \cdot \mathbf{v}_{abs} \cdot \mathbf{n} \cdot d\Gamma_\Pi = \dot{Q}_\Pi + \dot{W}_\Pi \quad (4.3.10)$$

No caso, as variações na energia interna do fluido e as trocas de calor podem ser interpretadas como perdas devido ao atrito. Desprezando-se essas perdas e assumindo-se escoamento incompressível,

$$\rho \cdot \int_{\Gamma_{\Pi}} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v_{\text{abs}}^2}{2} + g \cdot h \right) \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot \mathbf{n} \cdot d\Gamma_{\Pi} = \dot{W}_{\Pi} \quad (4.3.11)$$

A partir do trabalho líquido no volume de controle, a carga manométrica é dada por:

$$H = \frac{\dot{W}_{\Pi}}{\dot{m} \cdot g} \quad (4.3.12)$$

Substituindo-se (4.3.12) em (4.3.11), e passando-se para o sistema de coordenadas cilíndrico axissimétrico,

$$H = \frac{1}{\dot{m} \cdot g} \cdot \left[ \rho \cdot \int_{\Gamma} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v_{\text{abs}}^2}{2} + g \cdot h \right) \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot \mathbf{n} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Gamma \right] \quad (4.3.13)$$

A vazão mássica para escoamento incompressível é dada por:

$$\dot{m} = \rho \cdot Q \quad (4.3.14)$$

Assim,

$$H = \frac{1}{Q} \cdot \left[ \int_{\Gamma} \left( \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{v_{\text{abs}}^2}{2 \cdot g} + h \right) \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot \mathbf{n} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Gamma \right] \quad (4.3.15)$$

Se não for considerada a força da gravidade,  $h = 0$  na equação acima.

#### 4.3.4 Dissipação de energia

Com base em Incropera et al. (2008, p. CD-25) e White (2011, p. 247), a **equação da energia (1ª Lei da Termodinâmica)**, para fluido *newtoniano*, em sua forma diferencial é dada por:

$$\rho \cdot \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot \nabla e = \nabla \cdot (k \cdot \nabla T_K) + \mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}) - \Phi_v + q + \rho \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}} \quad (4.3.16)$$

em que

$e$  : Energia específica do escoamento, dada pela equação (4.3.9).

$\rho$  : Densidade (massa específica) do fluido.

$\mathbf{v}_{\text{abs}}$  : Vetor velocidade absoluta.

$k$  : Condutividade térmica.

$T_K$  : Temperatura absoluta (em K).

$\mathbf{T}$  : Tensor de tensões.

$\Phi_v$  : Dissipação de energia viscosa.

$q$  : Fonte de calor por unidade de volume (sentido positivo de calor entrando no fluido).

$\rho \cdot \mathbf{f}$  : Força atuando no fluido (por unidade de volume). Se for somente a força da gravidade, então  $\rho \cdot \mathbf{f} = \rho \cdot \mathbf{g} = \rho \cdot g \cdot \mathbf{e}_z$  ( $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$  : aceleração da gravidade).

Assumindo-se que não há fonte de calor ( $q = 0$ ) e regime permanente (

$\frac{\partial e}{\partial t} = 0$ ), tem-se que a equação da energia fica:

$$\rho \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot \nabla e = - \Phi_v + \rho \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}} \quad (4.3.17)$$

Integrando-se a equação acima no domínio de projeto, tem-se que a dissipação de energia  $\Phi$  pode ser dada na forma de potência por:

$$\Phi = \int_{\Pi} [\Phi_v - \rho \cdot f \cdot v_{abs}] d\Pi \quad (4.3.18)$$

Pode-se expressar a dissipação de energia viscosa  $\Phi_v$  na seguinte forma, conforme Borrall e Petersson (2003, p. 77) e Romero e Silva (2014, p. 274):

$$\Phi_v = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot (\nabla v_{abs} + \nabla v_{abs}^T) \cdot (\nabla v_{abs} + \nabla v_{abs}^T) \quad (4.3.19)$$

em que

$\mu$  : Viscosidade dinâmica (coeficiente de viscosidade).

A forma da dissipação viscosa acima é equivalente à apresentada por Incropera et al. (2008, p. CD-25), White (2011, p. 247) e Bird et al. (2002, p. 806), visto que:

$$(\nabla v_{abs} + \nabla v_{abs}^T) \cdot (\nabla v_{abs} + \nabla v_{abs}^T) = 2 \cdot (\nabla v_{abs} \cdot \nabla v_{abs} + \nabla v_{abs} \cdot \nabla v_{abs}^T) \quad (4.3.20)$$

Passando-se para o sistema de coordenadas cilíndrico axissimétrico, a dissipação de energia fica:

$$\Phi = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \mu \cdot (\nabla v_{abs} + \nabla v_{abs}^T) \cdot (\nabla v_{abs} + \nabla v_{abs}^T) - \rho \cdot f \cdot v_{abs} \right] \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega \quad (4.3.21)$$

Cabe notar que a dissipação de energia tem um sentido similar ao de arrasto e queda de pressão (BORRVALL e PETERSSON, 2003, p. 77) (ROMERO e SILVA, 2014, p. 274).

#### 4.3.5 Potência e torque de máquina de fluxo

A potência transmitida ao fluido pelos discos pode ser dada em função das velocidades de entrada e de saída. Segundo Munson et al. (2004, p. 216), a **equação da quantidade de movimento angular** (“*angular momentum equation*”, “equação do momento da quantidade de movimento”, “equação do momento angular”) em sua forma integral é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Pi} (\mathbf{s} \wedge \mathbf{v}_{\text{abs}}) \cdot \rho \cdot d\Pi + \int_{\Gamma_{\Pi}} (\mathbf{s} \wedge \mathbf{v}_{\text{abs}}) \cdot \rho \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot \mathbf{n} \cdot d\Gamma_{\Pi} = \sum (\mathbf{s} \wedge \mathbf{F})_{\Pi} \quad (4.3.22)$$

em que

$\Pi$  : Volume de controle.

$\Gamma_{\Pi}$  : Superfície de controle.

$d\Pi$  : Diferencial do volume de controle.

$d\Gamma_{\Pi}$  : Diferencial da área da superfície de controle.

$\mathbf{s}$  : Vetor posição.

$\mathbf{v}_{\text{abs}}$  : Vetor velocidade absoluta.

$\mathbf{F}$  : Força externa.

$\rho$  : Densidade (massa específica) do fluido.

Devido à presença do termo de velocidade no segundo termo da equação acima, a parte diferente de zero das equações consiste basicamente nas seções de entrada e de saída do contorno  $\Gamma_{\Pi}$ .

Considerando-se o fluido em regime permanente (i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Pi} (\mathbf{s} \wedge \mathbf{v}_{\text{abs}}) \cdot \rho \cdot d\Pi = 0),$$

$$\sum (\mathbf{s} \wedge \mathbf{F})_{\Pi} = \int_{\Gamma_{\Pi}} (\mathbf{s} \wedge \mathbf{v}_{\text{abs}}) \cdot \rho \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot \mathbf{n} \cdot d\Gamma_{\Pi} \quad (4.3.23)$$

O torque  $T_{\text{ext}}$  de uma bomba entra no volume de controle (sentido considerado com sinal positivo), não incluindo o efeito de forças de corpo, então:

$$\sum (s \wedge F)_\Pi = T_{ext} - \int_\Pi s \wedge (\rho \cdot f) \cdot d\Pi \quad (4.3.24)$$

$$T_{ext} = \sum (s \wedge F)_\Pi + \int_\Pi s \wedge (\rho \cdot f) \cdot d\Pi \quad (4.3.25)$$

Portanto,

$$T_{ext} = \int_{\Gamma_n} (s \wedge v_{abs}) \cdot \rho \cdot v_{abs} \cdot n \cdot d\Gamma_\Pi + \int_\Pi s \wedge (\rho \cdot f) \cdot d\Pi \quad (4.3.26)$$

A potência é dada por:

$$P_f = \omega_0 \cdot T_{ext} \quad (4.3.27)$$

Assim,

$$P_f = \int_{\Gamma_n} \omega_0 \cdot (s \wedge v_{abs}) \cdot \rho \cdot v_{abs} \cdot n \cdot d\Gamma_\Pi + \int_\Pi \omega_0 \cdot [s \wedge (\rho \cdot f)] \cdot d\Pi \quad (4.3.28)$$

Passando-se as equações (4.3.26) e (4.3.28) para o sistema de coordenadas cilíndrico axissimétrico,

$$T_{ext} = \int_\Gamma (s \wedge v_{abs}) \cdot \rho \cdot v_{abs} \cdot n \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Gamma + \int_\Omega s \wedge (\rho \cdot f) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega \quad (4.3.29)$$

$$P_f = \int_\Gamma \omega_0 \cdot (s \wedge v_{abs}) \cdot \rho \cdot v_{abs} \cdot n \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Gamma + \int_\Omega \omega_0 \cdot [s \wedge (\rho \cdot f)] \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega \quad (4.3.30)$$

A **equação da continuidade** na forma integral é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Pi \rho \cdot d\Pi + \int_{\Gamma_n} \rho \cdot v_{abs} \cdot n \cdot d\Gamma_\Pi = 0 \quad (4.3.31)$$

O primeiro termo da equação acima é a vazão mássica (  $\dot{m}$  ), portanto:

$$\dot{m} = - \int_{\Gamma_{\Pi}} \rho \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot \mathbf{n} \cdot d\Gamma_{\Pi} \quad (4.3.32)$$

em que

$\mathbf{n}$  : Vetor normal a  $d\Gamma_{\Pi}$ . O seu sentido positivo é apontando para fora do domínio. Assim, a velocidade normal ao contorno é dada por  $v_{\text{normal}} = \mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot \mathbf{n}$ .

Assim, na forma diferencial no sistema de coordenadas cilíndrico axissimétrico, obtém-se:

$$d\dot{m} = -\rho \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot \mathbf{n} \cdot 2\pi r \cdot d\Gamma \quad (4.3.33)$$

Substituindo-se (4.3.33) em (4.3.29) e (4.3.30),

$$\mathbf{T}_{\text{ext}} = - \int_{\Gamma} (\mathbf{s} \wedge \mathbf{v}_{\text{abs}}) \cdot d\dot{m} + \int_{\Omega} \mathbf{s} \wedge (\rho \cdot \mathbf{f}) \cdot 2\pi r \cdot d\Omega \quad (4.3.34)$$

$$P_f = - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\omega}_0 \cdot (\mathbf{s} \wedge \mathbf{v}_{\text{abs}}) \cdot d\dot{m} + \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega}_0 \cdot [\mathbf{s} \wedge (\rho \cdot \mathbf{f})] \cdot 2\pi r \cdot d\Omega \quad (4.3.35)$$

Pode-se desenvolver o primeiro produto vetorial que está na equação (4.3.34):

$$\mathbf{s} \wedge \mathbf{v}_{\text{abs}} = (r \cdot \mathbf{e}_r + r \cdot \theta \cdot \mathbf{e}_{\theta} + z \cdot \mathbf{e}_z) \wedge (v_{\text{abs}, r} \cdot \mathbf{e}_r + v_{\text{abs}, \theta} \cdot \mathbf{e}_{\theta} + v_{\text{abs}, z} \cdot \mathbf{e}_z) \quad (4.3.36)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s} \wedge \mathbf{v}_{\text{abs}} &= (r \cdot \theta \cdot v_{\text{abs}, z} - z \cdot v_{\text{abs}, \theta}) \cdot \mathbf{e}_r \\ &+ (-r \cdot v_{\text{abs}, z} + z \cdot v_{\text{abs}, r}) \cdot \mathbf{e}_{\theta} \\ &+ (r \cdot v_{\text{abs}, \theta} - r \cdot \theta \cdot v_{\text{abs}, r}) \cdot \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

Considerando-se malha 2D ( $\theta = 0$ ) e rotação em torno do eixo  $z$  ( $\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \cdot \mathbf{k}$ ), somente a componente em  $z$  do torque contribui para a potência.

Assim, obtém-se uma forma similar à equação fundamental das máquinas de fluxo (equação de Euler) (LADINO, 2004, p. 24),

$$P_f = - \int_{\Gamma} \omega_0 \cdot (r \cdot v_{abs, \theta}) \cdot d\dot{m} + \int_{\Omega} \omega_0 \cdot [s \wedge (\rho \cdot f)] \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega \quad (4.3.38)$$

#### 4.3.6 Vorticidade

Segundo Munson et al. (2004, p. 269), a **vorticidade** é dada por:

$$\xi = \nabla \wedge v_{abs} \quad (4.3.39)$$

De modo a se obter um valor escalar que represente a magnitude da vorticidade, pode-se utilizar o seu valor na forma de mínimos quadrados (ROMERO e SILVA, 2014, p. 274):

$$\xi_v = \int_{\Omega} |\nabla \wedge v_{abs}|^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega \quad (4.3.40)$$

No referencial relativo, pode-se definir uma vorticidade relativa:

$\xi_{v,rel} = \int_{\Omega} |\nabla \wedge v|^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$

(4.3.41)

#### 4.4 ANÁLISE DE SEMELHANÇA

A seguir são descritos alguns parâmetros adimensionais para análise de uma bomba Tesla e os parâmetros escolhidos para análise neste trabalho.

#### 4.4.1 Parâmetros adimensionais para o rotor da bomba Tesla

É possível fazer uma análise intuitiva com base no Teorema II de Buckingham, definindo vários parâmetros adimensionais e dimensionais de interesse.

Um parâmetro importante ao se analisar equipamentos que operam sob o princípio Tesla é o **parâmetro de Pohlhausen** (LADINO, 2004, p. 28). Ele foi referido originalmente por Breiter e Pohlhausen (1962, p. 11) como um parâmetro adimensional do espaçamento entre discos. O parâmetro de Pohlhausen é dado por:

$$Ph = e \cdot \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \quad (4.4.1)$$

em que

$e$  é o espaçamento entre discos.

$\omega$  é a velocidade angular dos discos.

$\nu$  é a viscosidade cinemática.

Segundo Foo (2010, p. 674), o parâmetro de Pohlhausen tem importante influência no desempenho, controlando o formato da distribuição da velocidade entre discos: Valores muito baixos levariam ao caso de rotação de corpo rígido, enquanto que valores muito altos corresponderiam a camadas limites praticamente descoladas e um trecho de fluido parado entre os discos. Por essa razão, segundo Foo (2010, p. 674), em bombas Tesla convencionais, este parâmetro é geralmente mantido como  $Ph \leq 2,5 \sim 3,5$ . Dependendo das dimensões da bomba Tesla, esse parâmetro pode possuir valor muito diferente, porque depende da transmissão de movimento dos discos para o fluido, que depende, além do espaçamento entre discos, do diâmetro deles.

Na tabela 4.4.1, foram condensados alguns parâmetros adimensionais utilizados na análise de bomba Tesla.

Tabela 4.4.1 - Parâmetros adimensionais

Parâmetro adimensional	Equação*
Caracterização da geometria	
<b>Razão de tamanho local</b> ( <i>local aspect ratio</i> ) (ALLEN, 1990, p. 29) → Medida da passagem do escoamento.	$\gamma_{local} = \frac{r_{ext}}{e/2}$
Caracterização da camada limite	
<b>Parâmetro de Pohlhausen</b> (LADINO, 2004, p. 28) (BREITER e POHLHAUSEN, 1962, p. 11) → Representa o espaçamento entre discos.	$Ph = e \cdot \sqrt{\frac{\omega}{v}}$
<b>Número de Ekman</b> (com base em Yu (2015, p. 87)) → Caracteriza o perfil de velocidades na camada limite.	$Ek = \frac{e}{2} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{v}}$
Caracterização do regime de escoamento	
<b>Parâmetro viscogeométrico (de Nendl)</b> (com base em Ladino (2004, p. 27)) → Número de Reynolds (com relação ao espaçamento entre discos) combinado com um parâmetro geométrico.	$Nd = Re_e \cdot \frac{e}{r_{ext}}$
<b>Número de Reynolds com relação ao espaçamento entre discos</b> (com base em Ladino (2004, p. 27)) → Define o regime de escoamento com relação ao espaçamento entre discos.	$Re_e = \frac{u_2 \cdot e}{v}$
<b>Número de Reynolds com relação ao raio externo</b> (com base em Ladino (2004, p.27)) → Define o regime de escoamento com relação ao raio externo dos discos.	$Re_{ext} = \frac{u_2 \cdot r_{ext}}{v}$
<b>Razão entre viscosidade e quantidade de movimento</b> (ALLEN, 1990, p. 30) → Razão entre viscosidade e quantidade de movimento.	$R^* = \frac{15}{8} \cdot \frac{\gamma_{local}}{Re_e/2}$
Caracterização da vazão	
<b>Parâmetro de dados essenciais da máquina</b> (com base em Foo (2010, p. 674)) → Representa o escoamento frente à viscosidade.	$A = \frac{Q \cdot e}{n_{saídas} \cdot v \cdot r_{int}^2}$
Caracterização da eficiência	
<b>Eficiência</b> (rendimento) → Representa o quanto eficiente é a transmissão de potência do eixo para o fluido.	$\eta = \frac{P_f}{P_{el}}$
<b>Eficiência isentrópica</b> (rendimento isentrópico) (com base em Ladino (2004, p. 29)) → Representa o quanto próxima da ideal é a transmissão de potência de eixo para o fluido.	$\eta_s = \frac{P_{ideal}}{P_{real}} = \frac{\Delta h_s}{P_f/m}$
Compressibilidade	
<b>Número de Mach</b> (LADINO, 2004, p. 28) → Caracteriza a compressibilidade do escoamento (para escoamentos compressíveis).	$Ma = \frac{u_2}{\sqrt{k \cdot R \cdot T}}$

\* Definições utilizadas na tabela 4.4.1:

$\omega$  : Velocidade angular (rad/s)

$v$  : Viscosidade cinemática ( $m^2/s$ )

$e$  : Espaçamento entre dois discos (m)

$e/2$  : Metade do espaçamento entre dois discos (espessura da camada limite) (m)

$r_{int}$  : Raio interno (entrada) do rotor (m)

$r_{ext}$  : Raio externo (saída) do rotor (m)

$u_2 = \omega \cdot r_{ext}$  : Velocidade tangencial do disco no raio externo (m/s)

$|v_{abs}|$  : Módulo da velocidade absoluta do fluido (m/s)

$Q$  : Vazão volumétrica ( $m^3/s$ )

$\dot{m}$  : Vazão mássica ( $kg/s$ )

$P_f$  : Potência fluida (hidráulica) (W)

$P_{real}$  : Potência real consumida (W)

$P_{ideal}$  : Potência ideal que seria consumida se o processo fosse isentrópico (W)

$P_{el}$  : Potência elétrica consumida (W)

$k$  : Razão de calores específicos

$R$  : Constante universal dos gases (J/(mol . K))

$T$  : Temperatura (K)

$\Delta h_s = v \cdot \Delta p = \Delta p / \rho$  : Variação de entalpia específica (trabalho específico) no processo ideal (J/kg)

$\Delta p$  : Variação de pressão (Pa)

$n_{saídas}$  : Número de saídas de fluido da bomba Tesla

Para os parâmetros adimensionais serem válidos para formato variável entre discos, estenderam-se as definições acima utilizando o espaçamento mínimo entre discos ( $e_{mín}$ ). Além disso, elaboraram-se versões locais das equações que dependem da velocidade do escoamento. Os novos parâmetros adimensionais podem ser vistos na tabela 4.4.2. Para os parâmetros de caracterização do regime de escoamento, computam-se os seus valores máximos (i.e., considerando-se  $|v_{abs}|_{máx}$ ).

Tabela 4.4.2 - Parâmetros adimensionais para análise

Parâmetro adimensional	Equação
Caracterização da camada limite	
<b>Parâmetro de Pohlhausen</b> (LADINO, 2004, p. 28) (BREITER e POHLHAUSEN, 1962, p. 11) → Representa o espaçamento entre discos.	$Ph = e_{mín} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{V}}$
Caracterização do regime de escoamento	
<b>Número de Reynolds local com relação ao raio externo</b> → Define o regime de escoamento em cada ponto do fluido com relação ao raio externo dos discos.	$Re_{ext, \ell} = \frac{ v_{abs}  \cdot r_{ext}}{v}$
<b>Parâmetro viscogeométrico (de Nendl) local</b> (com base em Ladino (2004, p. 27)) → Número de Reynolds (com relação ao espaçamento entre discos) combinado com um parâmetro geométrico.	$Nd_{ext, \ell} = \frac{ v_{abs}  \cdot e_{mín}^2}{v \cdot r_{ext}}$
Caracterização da vazão	
<b>Parâmetro de dados essenciais da máquina</b> (com base em Foo (2010, p. 674)) → Representa o escoamento frente à viscosidade.	$A = \frac{Q \cdot e_{mín}}{n_{saídas} \cdot v \cdot r_{int}^2}$
Caracterização da eficiência	
<b>Eficiência isentrópica</b> (rendimento isentrópico) (com base em Ladino (2004, p. 29)) → Representa o quanto próxima da ideal é a transmissão de potência de eixo para o fluido.	$\eta_s = \frac{P_{ideal}}{P_{real}} = \frac{\Delta h_s}{P_f / \dot{m}} = \frac{\Delta p / \rho}{P_f / \dot{m}}$

#### 4.4.2 Parâmetro adimensional para a voluta da bomba Tesla

Para a voluta, pode ser definido um número de Reynolds local com base no comprimento aproximado do canal ao redor do rotor, e na velocidade máxima de escoamento,

$$Re_\ell = \frac{|v_{abs}| \cdot \ell}{\nu} \quad (4.4.2)$$

em que

$|v_{abs}|$  : Módulo da velocidade absoluta do fluido.

$\ell$  : Comprimento aproximado do canal ao redor do rotor.

$$\ell = 2\pi \left( r_{ext} + \frac{b_{saída}}{2} \right) + (x_{rotor} - r_{ext})$$

em que (ver a figura 4.4.1)

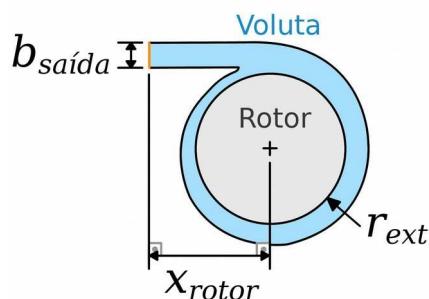
$x_{rotor}$  : Distância horizontal do centro da bomba com relação à saída do canal.

$b_{saída}$  : Largura da saída da voluta.

$r_{ext}$  : Raio externo (saída) do rotor da bomba.

$\nu$  é a viscosidade cinemática.

Figura 4.4.1 - Dimensões utilizadas no cálculo do número de Reynolds para a voluta



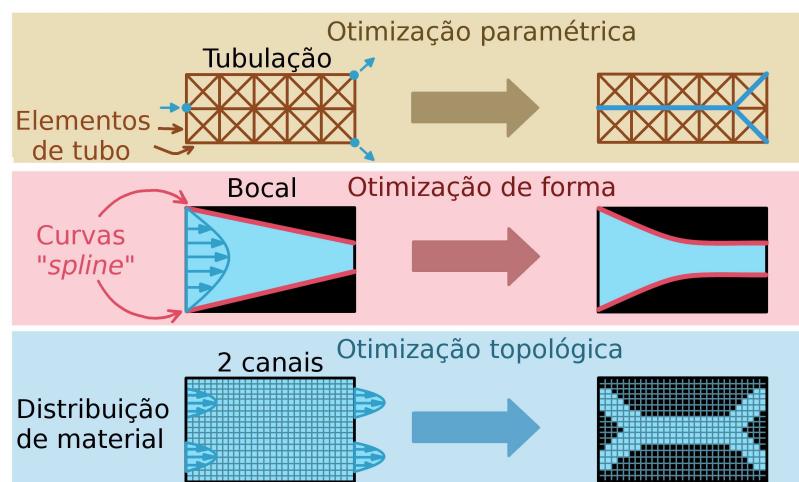
Fonte: Própria

#### 4.5 OTIMIZAÇÃO TOPOLOGÍCA

Para otimizar alguma função ou funcionalidade, existem basicamente três métodos (ver a figura 4.5.1):

- Otimização paramétrica (“*parametric optimization*”), visando otimizar parâmetro(s) da estrutura.
- Otimização de forma (“*shape optimization*”), visando otimizar o contorno da estrutura (por meio de *splines* ou *nurbs*).
- Otimização topológica (“*topology optimization*”), visando otimizar a distribuição de material da estrutura.

Figura 4.5.1 - Exemplificação dos métodos de otimização por meio de minimização de perda de carga em canais



Fonte: Própria (baseado em Koga (2010, p. 24))

Dentre os métodos apresentados acima, o mais genérico é o de otimização topológica (MOT, Método de Otimização Topológica). O método de otimização topológica foi aplicado inicialmente para problemas estruturais (BENDSØE e KIKUCHI, 1988), sendo chamado neste caso de “método de densidade”, mas foi estendido para a área de fluidos por Borrvall e Petersson (2003), em que a dissipação de energia foi minimizada de modo a criar canais de escoamento em domínios bidimensionais.

A partir desse primeiro trabalho, a otimização topológica na área de fluidos vem sendo aplicada para uma grande variedade de escoamentos: de Stokes (BORRVALL e PETERSSON, 2003), de Darcy-Stokes (GUEST e PRÉVOST, 2006) (WIKER et al., 2007), de Navier-Stokes (EVGRAFOV, 2004) (OLESEN et al., 2006), levemente compressíveis (EVGRAFOV, 2006), não-newtonianos (PINGEN e MAUTE, 2010), turbulentos (PAPOUTSIS-KIACHAGIAS, 2011) etc. Além disso, a otimização topológica de fluidos foi estendida para diversos dispositivos que operam com fluidos, como válvulas (SONG et al., 2009), misturadores (ANDREASEN, 2009), retificadores (JENSEN et al., 2012), e rotores de máquinas de fluxo (ROMERO e SILVA, 2014).

Alternativamente ao “método de densidade”, o método de otimização topológica pode ser implementado via método de “*level-set*” (OSHER e SETHIAN, 1988) (DUAN et al., 2016) (ZHOU and LI, 2008), que consiste em, ao invés de otimizar um contorno (como no “método de densidade”), otimizar uma superfície cuja curva de nível na altura zero define a fronteira entre sólido e líquido, a partir de uma estimativa inicial com muitas fronteiras (vários círculos, por exemplo) que podem se juntar/afastar/desaparecer durante a otimização.

Também existem aplicações do método da derivada topológica (“*topological derivative*”) (SOKOLOWSKI e ZOCHOWSKY, 1999) (SÁ et al., 2016), que inclui o efeito do material na forma de buracos ao combinar as equações de equilíbrio sem perturbação (sem buracos) com as equações de equilíbrio considerando perturbação (com buracos).

As otimizações do rotor e da voluta da bomba Tesla foram feitas pelo “método de densidade” para otimização topológica (BORRVALL e PETERSSON, 2003).

#### 4.5.1 Variável de projeto e modelo de material

A variável de projeto ( $\alpha$ ) é uma pseudo-densidade (i.e., que assume valor entre 0 (sólido) e 1 (fluido)) distribuída espacialmente no domínio (ou em uma parte do domínio em que a distribuição de fluido será otimizada).

A ocupação de fluido no domínio de projeto é considerada como um efeito de porosidade do meio, devendo ser considerada nas equações da bomba Tesla, na forma de um modelo de material.

#### **Efeito de porosidade do meio**

Para simulação de um sistema com fluido (líquido, no caso) e sólido (envoltória), é necessário incluir a porosidade do meio (i.e., onde há fluido e onde há sólido) nas equações.

Segundo a **Lei de Darcy**, que foi obtida experimentalmente por Henry Darcy (1856), considerando escoamento de Stokes (em que efeitos de inércia são desprezíveis), escoamento com tortuosidade desprezível, meio poroso isotrópico muito grande e efeitos de contorno desprezíveis (VAFAI, 2005, p. 111), a queda de pressão no meio poroso é dada por (VAFAI, 2005, p. 111):

$$\nabla p_{\text{meio poroso}} = - \frac{\mu}{k} \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}} \quad (4.5.1)$$

em que

$\nabla p_{\text{meio poroso}}$  : Queda de pressão no meio poroso.

$\mu$  : Viscosidade dinâmica (coeficiente de viscosidade) do fluido.

$k$  : Permeabilidade do meio poroso.

$\mathbf{v}_{\text{rel}} = (v_r, v_\theta - \omega_m \cdot r, v_z)$  : Velocidade do fluido em relação ao meio poroso, em que  $\omega_m$  é a rotação do meio poroso com relação à rotação do referencial (no caso de otimizar os discos do rotor,  $\omega_m = 0$  (i.e.,  $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{v}$ )).

Uma extensão da Lei de Darcy é a **Equação de Brinkman**, que inclui um termo de difusão (“modelo de Brinkman”), não dependendo mais de restrições do tamanho do meio poroso isotrópico e de efeitos de contorno (VAFAI, 2005, p. 110):

$$\nabla p_{\text{meio poroso}} = - \frac{\mu}{k} \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mu \nabla^2 \mathbf{v}_{\text{rel}} \quad (4.5.2)$$

Pela Lei de Darcy (equação (4.5.1)), assumindo-se que a força de resistência viscosa do fluido seja a única que leva à queda de pressão no meio poroso, tem-se que (ROMERO e SILVA, 2014, p. 272):

$$\mathbf{f}_r = -\kappa(\alpha) \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}} \quad (4.5.3)$$

em que

$\mathbf{f}_r$  : Força de resistência viscosa do fluido, devida ao atrito entre o fluido e ao meio poroso.

$\kappa(\alpha)$  : Coeficiente de absorção (“permeabilidade inversa”), relativo ao modelo de material (ROMERO e SILVA, 2014, p. 273).

$\alpha$  : Pseudo-densidade (i.e., que assume valor entre 0 (sólido) e 1 (fluido)) (ROMERO e SILVA, 2014, p. 273).

### **Modelo de material**

Segundo Borrall e Petersson (2003, p. 96), como o objetivo é que a pseudo-densidade  $\alpha$  assuma valores 0 (sólido) ou 1 (fluido), a ideia é escolher uma função  $\alpha$  que permita valores intermediários do coeficiente de absorção  $\kappa(\alpha)$ , relaxando o problema de otimização, mas que dificultem a ocorrência desses valores. Como escolher uma função de interpolação linear dificultaria muito o processo de otimização e levaria a soluções ótimas locais (e não globais) (BORRVALL e PETERSSON, 2003, p. 96), é utilizada uma função de interpolação convexa dada por (BORRVALL e PETERSSON, 2003, p. 96) (ROMERO e SILVA, 2014, p. 273):

$$\kappa(\alpha) = \kappa_{\max} + (\kappa_{\min} - \kappa_{\max}) \cdot \alpha \cdot \frac{1 + q}{\alpha + q} \quad (4.5.4)$$

em que

$\kappa(\alpha)$  : Coeficiente de absorção (“permeabilidade inversa”).

$\alpha$  : Pseudo-densidade (variável de projeto) (i.e., que assume valor entre 0 (sólido) e 1 (fluído)).

$\kappa_{\max}$  : Valor máximo de  $\kappa(\alpha)$ .

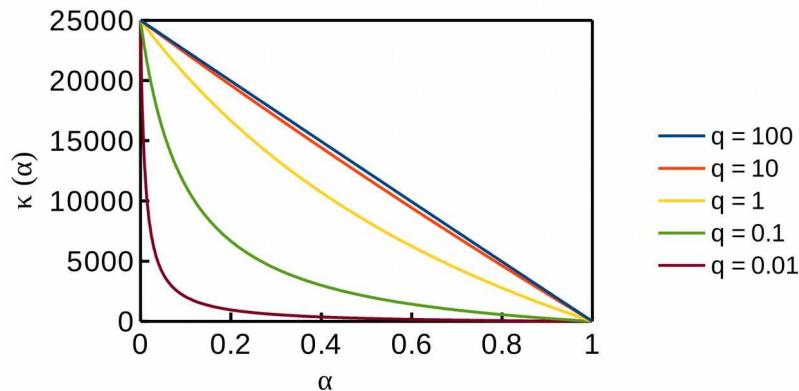
$\kappa_{\min}$  : Valor mínimo de  $\kappa(\alpha)$ .

$q$  : Parâmetro de penalização, que controla a convexidade de  $\kappa(\alpha)$  ( $q$ ). Determina o “cinza”, que não tem significado físico, da estrutura otimizada.

O coeficiente de absorção  $\kappa(\alpha)$  faz uma interpolação entre uma vazão volumétrica pequena (i.e., sólido, em que  $\kappa(\alpha \approx 0) = \kappa_{\max} \gg 1$ ) e uma vazão volumétrica alta (i.e., fluido, em que  $\kappa(\alpha \approx 1) = \kappa_{\min} \approx 0$ ) (BORRVALL e PETERSSON, 2003, p. 96) (ROMERO e SILVA, 2014, p. 273). Borrall e Petersson

(2003, p. 96) sugere a utilização de  $\kappa_{\min} = \frac{2,5 \cdot \mu}{100^2}$  e  $\kappa_{\max} = \frac{2,5 \cdot \mu}{0,01^2}$ . Para  $\mu = 1 \text{ Pa.s}$  e diversos  $q$ 's,  $\kappa(\alpha)$  pode ser visto na figura 4.5.2.

Figura 4.5.2 - Influência do parâmetro  $q$  no modelo de material, com  $\kappa_{\max} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$  e  $\kappa_{\min} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg/(m}^3\text{s)}$



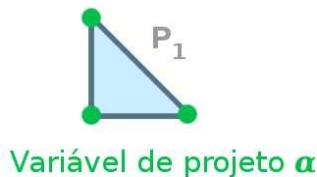
Fonte: Própria (baseado em Borrall e Petersson (2003, p. 96))

O valor de  $\kappa_{mín}$  é por vezes escolhido como sendo 0. O valor de  $\kappa_{máx}$  deve ser escolhido alto o suficiente para não haver escoamento de fluido quando há sólido, mas não alto demais para não criar uma “zona de influência” do modelo de material, em que o escoamento de fluido é bloqueado mesmo estando com uma porcentagem muito pequena de “cinza” (quase totalmente fluido).

Borrvall e Petersson (2003, p. 97) sugere a utilização de  $q = 0,1$ , que deve fornecer uma solução com valores suficientemente discretos para a pseudo-densidade. Em alguns casos, de modo a tentar evitar mínimos locais no processo de otimização, Borrvall e Petersson (2003, p. 97) sugere a utilização de dois passos: começar com um valor menor de  $q$  ( $q = 0,01$ ), que visa amenizar o efeito da estimativa inicial da otimização topológica, e depois alternar para  $q = 0,1$ . Esse procedimento consiste basicamente de um método de continuação (“*continuation method*”), em que se gera uma estimativa inicial boa para o Método de Newton-Raphson a partir da solução de um problema que se consegue aproximar melhor do mínimo global do problema.

Para a variável de projeto  $\alpha$  (do modelo de material, para otimização), foram escolhidos elementos de Lagrange contínuos  $P_1$  (isoparamétricos) para a variável de projeto (figura 4.5.3), conforme sugerido para otimização topológica por Funke et al. (2017). A outra opção seria ter escolhido elementos de Lagrange discretos  $P_0$  (subparamétricos), o que significaria um ponto de interpolação no meio de cada elemento.

Figura 4.5.3 - Interpolação escolhida para a variável de projeto  $\alpha$



Fonte: Própria

Outros modelos de material e penalizações adicionais podem ser vistos no “Apêndice E – Variações no modelo de material”.

### Modelo de material estendido

A finalidade do modelo de material é evitar a passagem de fluido dentro do meio poroso enquanto mantém uma permeabilidade baixa o suficiente para relaxar o problema de otimização. Como no projeto de uma bomba Tesla em referencial rotativo a velocidade tangencial é relativa e geralmente pequena, o modelo de material pode ser mais relaxado na direção tangencial do que nas direções radial e axial. De modo a conseguir esse efeito, a equação (4.5.3) pode ser alterada para:

$$\mathbf{f}_r = -\kappa(\alpha) \cdot \mathbf{v}_{rel} = -(\kappa_r(\alpha) \cdot v_{rel,r}, \kappa_\theta(\alpha) \cdot v_{rel,\theta}, \kappa_z(\alpha) \cdot v_{rel,z}) \quad (4.5.5)$$

em que

$$\kappa(\alpha) = \begin{bmatrix} \kappa_r(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_\theta(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_z(\alpha) \end{bmatrix} : \text{Matriz de absorção ("matriz de permeabilidade inversa").}$$

Para o projeto de uma bomba Tesla em referencial rotativo,  $\kappa_r(\alpha)$  e  $\kappa_z(\alpha)$  podem ser escolhidos com os mesmos valores, enquanto  $\kappa_\theta(\alpha)$  pode ser escolhido com um menor  $\kappa_{máx}$  e/ou  $q$  (i.e., mais relaxado). O resultado disso é que, na otimização topológica, a formação de um canal conectando entrada e saída deve ser reforçada em relação ao efeito da rotação, que tende a adicionar material no meio do domínio de projeto, fechando a entrada e a saída.

Assim, a equação (4.5.5) é substituída por três diferentes equações:

$$\kappa_r(\alpha) = \kappa_{r,máx} + (\kappa_{r,mín} - \kappa_{r,máx}) \cdot \alpha \cdot \frac{1 + q_r}{\alpha + q_r} \quad (4.5.6)$$

$$\kappa_\theta(\alpha) = \kappa_{\theta,máx} + (\kappa_{\theta,mín} - \kappa_{\theta,máx}) \cdot \alpha \cdot \frac{1 + q_\theta}{\alpha + q_\theta} \quad (4.5.7)$$

$$\kappa_z(\alpha) = \kappa_{z,máx} + (\kappa_{z,mín} - \kappa_{z,máx}) \cdot \alpha \cdot \frac{1 + q_z}{\alpha + q_z} \quad (4.5.8)$$

A seguir, o modelo de material foi incluído nas equações de Navier-Stokes, na dissipação de energia, na potência e na vorticidade.

### ***Modelo de material nas equações de Navier-Stokes***

A partir da equação (4.5.5), pode-se incluir o efeito da porosidade do meio como sendo uma força externa atuando nas equações da bomba Tesla.

Incluindo-se (4.5.5) em (4.1.16), obtém-se as equações de Navier-Stokes para sistema de referência rotativo segundo o modelo Brinkman considerando um modelo de material estendido:

$$\rho \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \cdot \mathbf{f} - 2 \cdot \rho \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}) - \rho \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{s}) + \mathbf{f}_r \quad (4.5.9)$$

$$\rho \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \cdot \mathbf{f} - 2 \cdot \rho \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}) - \rho \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{s}) - \kappa(\alpha) \cdot \mathbf{v}_{rel}$$

$$(4.5.10)$$

### ***Modelo de material na forma fraca do problema***

Incluindo-se o efeito de porosidade do meio na forma fraca do problema, a equação (4.2.16), que corresponde às equações de Navier-Stokes, se torna:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{m,j} = & \int_{\Omega} [\rho \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{w}_{v,j}) - \rho \cdot \mathbf{f} + 2 \cdot \rho \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}) + \rho \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{s}) - \mathbf{f}_r] \cdot \mathbf{w}_{v,j} \cdot r \cdot d\Omega \\ & - \oint_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}_{v,j}) \cdot \mathbf{n} \cdot r \cdot d\Gamma \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{m,j} = & \int_{\Omega} [\rho \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{w}_{v,j}) - \rho \cdot \mathbf{f} + 2 \cdot \rho \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}) + \rho \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{s}) + \kappa(\alpha) \cdot \mathbf{v}_{rel}] \cdot \mathbf{w}_{v,j} \cdot r \cdot d\Omega \\ & - \oint_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}_{v,j}) \cdot \mathbf{n} \cdot r \cdot d\Gamma \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

Separando-se  $\kappa(\alpha)$  na equação (4.5.12),

$$\boxed{\hat{R}_{m,j} = \int_{\Omega_a} [\rho \cdot \nabla v \cdot v + T \cdot (\nabla w_{v,j}) - \rho \cdot f + 2 \cdot \rho \cdot (\omega \wedge v) + \rho \cdot \omega \wedge (\omega \wedge s)] \cdot w_{v,j} \cdot r \cdot d\Omega - \oint_{\Gamma} (T \cdot w_{v,j}) \cdot n \cdot r \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} \kappa(\alpha) \cdot v_{rel} \cdot w_{v,j} \cdot r \cdot d\Omega} \quad (4.5.13)$$

### **Modelo de material na dissipação de energia**

Na equação da energia (1<sup>a</sup> Lei da Termodinâmica) (equação (4.3.17)), o efeito de porosidade do meio surge como uma força externa ao fluido imposta por sólido, de forma análoga ao termo das forças de corpo ( $\rho \cdot f$ ), ficando:

$$\rho \cdot v_{abs} \cdot \nabla e = - \Phi_v + \rho \cdot f \cdot v_{abs} + f_r \cdot v_{abs} \quad (4.5.14)$$

$$\rho \cdot v_{abs} \cdot \nabla e = - \Phi_v + \rho \cdot f \cdot v_{abs} - \kappa(\alpha) \cdot v_{rel} \cdot v_{abs} \quad (4.5.15)$$

Assim, a dissipação de energia fica:

$$\boxed{\Phi = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \mu \cdot (\nabla v_{abs} + \nabla v_{abs}^T) \cdot (\nabla v_{abs} + \nabla v_{abs}^T) - \rho \cdot f \cdot v_{abs} + \kappa(\alpha) \cdot v_{rel} \cdot v_{abs} \right] \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega} \quad (4.5.16)$$

Como a equação da energia é válida no referencial relativo (conservação de energia), a equação acima pode ser expressa com velocidades relativas ( $v$ ) em vez de velocidades absolutas ( $v_{abs}$ ), de forma a expressar uma **dissipação de energia relativa**:

$$\Phi_{rel} = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \mu \cdot (\nabla v + \nabla v^T) \cdot (\nabla v + \nabla v^T) - \rho \cdot f \cdot v + \kappa(\alpha) \cdot v_{rel} \cdot v \right] \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega \quad (4.5.17)$$

Separando-se  $\kappa(\alpha)$  na equação (4.5.17),

$$\boxed{\Phi_{rel} = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \mu \cdot (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \cdot (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) - \rho \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \right] \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \kappa(\alpha) \cdot \mathbf{v}_{rel} \cdot \mathbf{v} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega} \quad (4.5.18)$$

### **Modelo de material na potência e no torque**

Na equação do torque (equação (4.3.24)), o efeito de porosidade do meio surge como uma força externa ao fluido imposta por sólido, de forma análoga ao termo das forças de corpo ( $\rho \cdot \mathbf{f}$ ), ficando:

$$\sum (\mathbf{s} \wedge \mathbf{F})_{\Pi} = \mathbf{T}_{ext} - \int_{\Pi} \mathbf{s} \wedge (\rho \cdot \mathbf{f}) \cdot d\Pi - \int_{\Pi} \mathbf{s} \wedge \mathbf{f}_r \cdot d\Pi \quad (4.5.19)$$

Assim, a equação (4.5.19) fica:

$$\mathbf{T}_{ext} = \int_{\Gamma} (\mathbf{s} \wedge \mathbf{v}_{abs}) \cdot \rho \cdot \mathbf{v}_{abs} \cdot \mathbf{n} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{s} \wedge (\rho \cdot \mathbf{f}) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{s} \wedge \mathbf{f}_r \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega \quad (4.5.20)$$

(4.5.21)

E a potência fica

$$\boxed{P_f = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\omega}_0 \cdot (\mathbf{s} \wedge \mathbf{v}_{abs}) \cdot \rho \cdot \mathbf{v}_{abs} \cdot \mathbf{n} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega}_0 \cdot [\mathbf{s} \wedge (\rho \cdot \mathbf{f})] \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega}_0 \cdot (\mathbf{s} \wedge (\kappa(\alpha) \cdot \mathbf{v}_{rel})) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega} \quad (4.5.22)$$

### **Modelo de material na vorticidade**

Incluindo-se o efeito de porosidade do meio na vorticidade (equação (4.3.39)) e considerando-se o seu valor relativo,

$$\xi_{rel} = \nabla \wedge \mathbf{v} + \xi_{\kappa} \quad (4.5.23)$$

em que

$\xi_{\kappa}$  : Aumento de vorticidade causado pelo meio poroso.

Se a influência do meio poroso for diretamente proporcional ao rotacional da desaceleração causada pelo meio poroso,

$$\xi_{\kappa} = k_v \cdot \nabla \wedge \left( \frac{\mathbf{f}_r}{\rho} \right) \quad (4.5.24)$$

em que

$k_v$  : Constante de proporcionalidade.

Assim,

$$\xi_{rel} = \nabla \wedge \mathbf{v} + k_v \cdot \nabla \wedge \left( \frac{\mathbf{f}_r}{\rho} \right) \quad (4.5.25)$$

Utilizando-se o seu valor na forma de mínimos quadrados (ROMERO e SILVA, 2014, p. 274):

$$\xi_{v,rel} = \int_{\Omega} |\xi_{rel}|^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \left| \nabla \wedge \mathbf{v} - \frac{k_v}{\rho} \cdot \nabla \wedge (\kappa(\alpha) \cdot \mathbf{v}_{rel}) \right|^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$$

(4.5.26)

#### 4.5.2 Otimização topológica do rotor da bomba Tesla

##### Função multiobjetivo

Para o projeto do rotor da bomba Tesla, foi escolhida uma função multiobjetivo incluindo a dissipação de energia, a potência e a vorticidade (ROMERO e SILVA, 2014, p. 275) para alguns casos específicos de ponderação, sem entrar no mérito de delinear uma frente de Pareto (“*Pareto front*”).

É possível definir uma função multiobjetivo para o problema da bomba Tesla, considerando-se a dissipação de energia (equação (4.5.18)), a potência de máquina de fluxo (equação (4.5.22)) e a vorticidade (equação (4.5.26)) (ROMERO e SILVA, 2014, p. 275). Assim, são atribuídos pesos que representam as importâncias relativas de cada termo da função multiobjetivo. O efeito de domínio do resultado pela função de maior derivada é menos pronunciado no caso de funções não-lineares (como é o caso), mas, dependendo do problema, o uso de uma função multiobjetivo pode levar a resultados imprevisíveis.

De modo a suavizar as diferenças de magnitude nos termos envolvidos, pode-se montar uma função multiobjetivo logarítmica, que utiliza os logaritmos das funções envolvidas (ROMERO e SILVA, 2014, p. 275), ou de pesos adaptativos, que utiliza pesos que mudam a cada iteração (ZHU et al., 2014, p. 433) (SÁ, 2016, p. 39).

A função multiobjetivo de pesos adaptativos consiste em um esquema de atribuição de pesos adaptativos (“*adaptive weight factor setting scheme*”) (ZHU et al., 2014, p. 433) (SÁ, 2016, p. 39)

$$J = w_{\Phi} \cdot \Phi_{rel} \pm w_P \cdot \beta_k \cdot P_f + w_V \cdot \gamma_k \cdot \xi_{V,rel} \quad (4.5.27)$$

em que

$\Phi_{rel}$  : Dissipação de energia relativa, dada pela equação (4.5.18):

$$\begin{aligned} \Phi_{rel} = & \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \mu \cdot (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \cdot (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) - \rho \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \right] \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \kappa(\alpha) \cdot \mathbf{v}_{rel} \cdot \mathbf{v} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega \end{aligned}$$

$P_f$  : Potência de máquina de fluxo, dada pela equação (4.5.22):

$$P_f = \int_{\Gamma} \omega_0 \cdot (s \wedge v_{abs}) \cdot \rho \cdot v_{abs} \cdot n \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} \omega_0 \cdot [s \wedge (\rho \cdot f)] \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$$

$$- \int_{\Omega} \omega_0 \cdot (s \wedge (\kappa(\alpha) \cdot v_{rel})) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$$

$\xi_{V,rel}$  : Vorticidade, dada pela equação (4.5.26):

$$\xi_{V,rel} = \int_{\Omega} \left| \nabla \wedge v - \frac{k_V}{\rho} \cdot \nabla \wedge (\kappa(\alpha) \cdot v_{rel}) \right|^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$$

$w_{\Phi} + w_P + w_V = 1$  : Pesos.

$\beta_k$ ,  $\gamma_k$  : Pesos adaptativos, que mudam a cada iteração  $k$ ,

sendo dados por:

$$\beta_k = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 0 \\ \frac{\Phi_{rel,k-1}}{P_{f,k-1}}, & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

$$\gamma_k = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 0 \\ \frac{\Phi_{rel,k-1}}{\xi_{V,rel,k-1}}, & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

Se a potência precisa ser minimizada, como em bombas, o termo de potência utiliza um sinal positivo ( $+ P_f$ ); senão, utiliza um sinal negativo ( $- P_f$ ).

Nos casos em que não é utilizada função multiobjetivo, será usada somente a função separada, como em  $J = \Phi_{rel}$  e  $J = \pm P_f$ .

Cabe notar que os termos de dissipação de energia, de potência e de vorticidade que incluem o modelo de material são os responsáveis por formar a topologia, sendo que os outros termos são responsáveis por guiar a formação da topologia, mudando essencialmente o seu contorno.

As formas discretas dos funcionais utilizados na função multiobjetivo estão detalhadas no “Apêndice B – Formas discretas no modelo 2D de escoamento girante”.

### **Restrição de volume de fluido**

Para limitar a quantidade de fluido no domínio de projeto, é prescrita uma fração de volume máxima que pode ser ocupada por fluido (ROMERO e SILVA, 2014, p. 274):

$$\int_{\Omega_\alpha} \alpha \cdot (2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega_\alpha) \leq f \cdot V_0 \quad (4.5.28)$$

em que

$\alpha$  : Pseudo-densidade (variável de projeto) (equação (4.5.5)).

$\Omega_\alpha$  : Domínio de projeto.

$f$  : Fração especificada de volume.

$V_0 = \int_{\Omega_\alpha} 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega_\alpha$  : Volume do domínio de projeto (para otimização).

### Formulação do problema de otimização

A formulação do problema de otimização está condensada abaixo.

$$\min_{\alpha} J(p(\alpha), v(\alpha), \alpha) = w_\Phi \cdot \Phi_{rel} \pm w_p \cdot \beta_k \cdot P_f + w_V \cdot \gamma_k \cdot \xi_v$$

tal que

- Equação da continuidade:  $\nabla \cdot v = 0$
- Equações de Navier-Stokes (modelo Brinkman):  
 $\rho \cdot \nabla v \cdot v = \nabla \cdot T + \rho \cdot f - 2 \cdot \rho \cdot (\omega \wedge v) - \rho \cdot \omega \wedge (\omega \wedge r) - \kappa(\alpha) \cdot v_{rel}$
- Condições de contorno do problema
- Restrição de volume de fluido:  $\int_{\Omega} \alpha \cdot (2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega) \leq f \cdot V_0$
- Restrição de caixa, de  $\alpha$ :  $0 \leq \alpha \leq 1$

(4.5.29)

#### 4.5.3 Otimização topológica da voluta da bomba Tesla

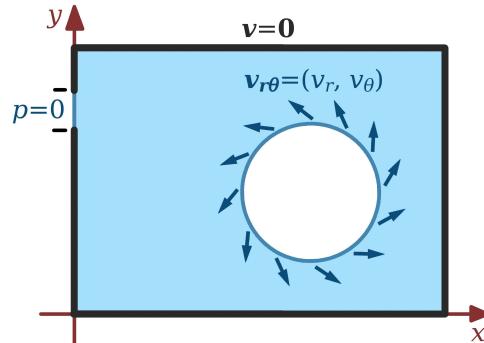
O modelo para simulação/otimização da bomba Tesla apresentado anteriormente não considera o efeito da voluta. Para otimização topológica da voluta da bomba Tesla, é necessário utilizar a versão da equação (4.5.13) para coordenadas cartesianas e referencial absoluto, sem considerar o modelo de

material estendido. Assim, considerando-se um domínio com espessura unitária (i.e., “1 m”) (ver “Apêndice C – Equações para o modelo 2D”),

$$\boxed{R_{m,j} = \int_{\Omega} [\rho \cdot \nabla \mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}} + \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{w}_{v,j}) - \rho \cdot \mathbf{f}] \cdot \mathbf{w}_{v,j} \cdot d\Omega - \oint_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}_{v,j}) \cdot \mathbf{n} \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} \kappa(\alpha) \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{w}_{v,j} \cdot d\Omega} \quad (4.5.30)$$

Na figura 4.5.4, está representado um domínio 2D considerado na otimização da voluta da bomba Tesla. O perfil de velocidade na saída do rotor da bomba Tesla, por haver sido calculado por um modelo axissimétrico, será o mesmo para qualquer ângulo com relação ao centro do rotor. Assim, cada conjunto de velocidades de saída é dado com relação a uma posição entre os discos da bomba Tesla (como a altura  $z$  da figura 4.1.1).

Figura 4.5.4 - Domínio de projeto 2D e as condições de contorno para a voluta



Fonte: Própria

Utilizando-se parâmetros análogos aos da formulação da otimização do rotor da bomba Tesla (em (4.5.29)), mas considerando-se a função objetivo como sendo a dissipação de energia e o material sólido da otimização parado (i.e.,  $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{v}_{\text{abs}}$ ), a formulação do problema de otimização fica:

$$\min_{\alpha} J(p(\alpha), \mathbf{v}(\alpha), \alpha) = \Phi_{\text{abs}}$$

**tal que**

- Equação da continuidade:  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
- Equações de Navier-Stokes (modelo Brinkman):  
 $\rho \cdot \nabla \mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \cdot \mathbf{f} - \kappa(\alpha) \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}}$
- Condições de contorno do problema
- Restrição de volume de fluido:  $\int_{\Omega_a} \alpha \cdot d\Omega_a \leq f \cdot V_0$
- Restrição de caixa, de  $\alpha$ :  $0 \leq \alpha \leq 1$

(4.5.31)

A função objetivo de dissipação de energia para o modelo 2D é dada por:

$$J = \Phi_{\text{abs}} = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \mu \cdot (\nabla \mathbf{v}_{\text{abs}} + \nabla \mathbf{v}_{\text{abs}}^T) \cdot (\nabla \mathbf{v}_{\text{abs}} + \nabla \mathbf{v}_{\text{abs}}^T) - \rho \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}} \right] \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \kappa(\alpha) \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot d\Omega$$

(4.5.32)

## 4.6 SENSIBILIDADES NA OTIMIZAÇÃO TOPOLOGÍCA

O cálculo de sensibilidades (derivadas, gradientes, “*sensitivities*”) da função objetivo é essencial para realizar otimização topológica. Apesar desse cálculo ser feito por meio de derivação simbólica automatizada na plataforma FEniCS, como está mencionado na seção “6 Implementação numérica”, é importante separar a influência dos termos que o compõem.

A forma discreta do cálculo de sensibilidades para o modelo 2D de escoamento girante é descrita no “Apêndice B – Formas discretas no modelo 2D de escoamento girante”.

### 4.6.1 Cálculo de sensibilidades pelo método adjunto

Na maioria dos métodos de otimização, é necessário calcular a sensibilidade de um dado funcional  $J(\mathbf{u}, \alpha)$ . Existem três modos para fazer isso: numericamente por aproximação por diferenças finitas, analiticamente pelo método direto (também

chamado de “método linear tangente”) ou analiticamente pelo método adjunto. No caso, foi utilizado o método adjunto.

O método adjunto (também chamado de “método dual”) considera que o vetor de variáveis de estado ( $\mathbf{u} = [v_r \ v_\theta \ v_z \ p]^T$ ) pode ser dado em função das variáveis de projeto, que, no caso, é somente uma,  $\alpha$ . Sendo  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\alpha)$ , o funcional  $J(\mathbf{u}, \alpha)$  pode ser dado em função de  $\alpha$ , na forma de um funcional reduzido,  $\hat{J}(\alpha) = J(\mathbf{u}(\alpha), \alpha)$ .

O método adjunto consiste em calcular a sensibilidade (gradiente) de  $\hat{J}(\alpha)$ , o que pode ser feito pela regra da cadeia (FARRELL, 1, 2017):

$$\frac{d\hat{J}}{d\alpha} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\alpha} + \frac{\partial J}{\partial \alpha} \quad (4.6.1)$$

Considerando-se que a forma fraca (variacional) do problema é dada por  $F(\mathbf{u}, \alpha) = 0$ , tem-se que  $\frac{dF}{d\alpha} = 0$  e, utilizando-se a regra da cadeia, obtém-se o modelo linear tangente:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\alpha} = - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \quad (4.6.2)$$

Supondo-se que o modelo acima seja invertível,  $\frac{d\mathbf{u}}{d\alpha} = - \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial \alpha}$ , e

$$\frac{d\hat{J}}{d\alpha} = - \frac{\partial J}{\partial \alpha} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial J}{\partial \alpha}, \quad (4.6.3)$$

que corresponde ao modelo linear tangente.

Utilizando-se a transposta conjugada da equação acima (FARRELL, 1, 2017),

$$\left( \frac{d\hat{J}}{d\alpha} \right)^* = - \left( \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right)^* \cdot \lambda + \left( \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right)^*, \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} \right)^* \cdot \lambda = \left( \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \right)^* \quad (4.6.4)$$

em que

$(\cdot)^*$  : Matriz adjunta (também chamada de “matriz transposta Hermitiana” e “matriz conjugada transposta”) da matriz  $(\cdot)$ .

$\lambda$  : Variável adjunta associada a  $\mathbf{u}$ , dada pela equação adjunta (“sistema adjunto”) (equação da direita da equações (4.6.4)).

$\left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}}\right)^*$  : Derivada do funcional com relação às variáveis de estado, que é específica de cada funcional  $J$ .

$\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}}\right)^*$  : Operador adjunto (“adjunta do operador linear tangente”), que só depende da forma variacional do problema sendo resolvido.

No método adjunto, as equações (4.6.4) são utilizadas no cálculo de sensibilidades (gradientes) de um funcional.

O fluxo de informação é invertido no método adjunto (matrizes triangulares superiores) com relação ao modelo tangente linear (matrizes triangulares inferiores), assim o método adjunto consiste em um método de substituição regressiva (“*backward substitution*”) (FARRELL et al., 2013, p. 6).

Segundo Farrell (1, 2017), resolver o sistema adjunto é extremamente eficiente quando há um número pequeno de funcionais e um grande número de parâmetros.

#### 4.6.2 Sensibilidade no projeto do rotor

A sensibilidade da função multiobjetivo dada pela equação (4.5.27) é dada por:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = w_{\Phi} \cdot \frac{d\Phi_{rel}}{d\alpha} \pm w_p \cdot \beta_k \cdot \frac{dP_f}{d\alpha} + w_v \cdot \gamma_k \cdot \frac{d\xi_{V,rel}}{d\alpha} \quad (4.6.5)$$

Na equação acima, os pesos  $w_\Phi$ ,  $w_P$  e  $w_V$  são constantes, tal como os pesos adaptativos  $\beta_k$  e  $\gamma_k$ , que são constantes para cada iteração da otimização.

Conforme a equação (4.6.4), as sensibilidades dos termos da equação (4.6.5) são dadas por

$$\left( \frac{d\Phi_{rel}}{d\alpha} \right)^* = \left( \frac{\partial\Phi_{rel}}{\partial\alpha} \right)^* - \left( \frac{\partial F}{\partial\alpha} \right)^* \cdot \lambda_\Phi , \quad \left( \frac{\partial F}{\partial\mathbf{u}} \right)^* \cdot \lambda_\Phi = \left( \frac{\partial\Phi_{rel}}{\partial\mathbf{u}} \right)^* \quad (4.6.6)$$

$$\left( \frac{dP_f}{d\alpha} \right)^* = \left( \frac{\partial P_f}{\partial\alpha} \right)^* - \left( \frac{\partial F}{\partial\alpha} \right)^* \cdot \lambda_P , \quad \left( \frac{\partial F}{\partial\mathbf{u}} \right)^* \cdot \lambda_P = \left( \frac{\partial P_f}{\partial\mathbf{u}} \right)^* \quad (4.6.7)$$

$$\left( \frac{d\xi_{V,rel}}{d\alpha} \right)^* = \left( \frac{\partial\xi_{V,rel}}{\partial\alpha} \right)^* - \left( \frac{\partial F}{\partial\alpha} \right)^* \cdot \lambda_V , \quad \left( \frac{\partial F}{\partial\mathbf{u}} \right)^* \cdot \lambda_V = \left( \frac{\partial\xi_{V,rel}}{\partial\mathbf{u}} \right)^* \quad (4.6.8)$$

#### 4.6.3 Sensibilidade no projeto da voluta

A sensibilidade da função objetivo dada pela equação (4.5.32) é dada por:

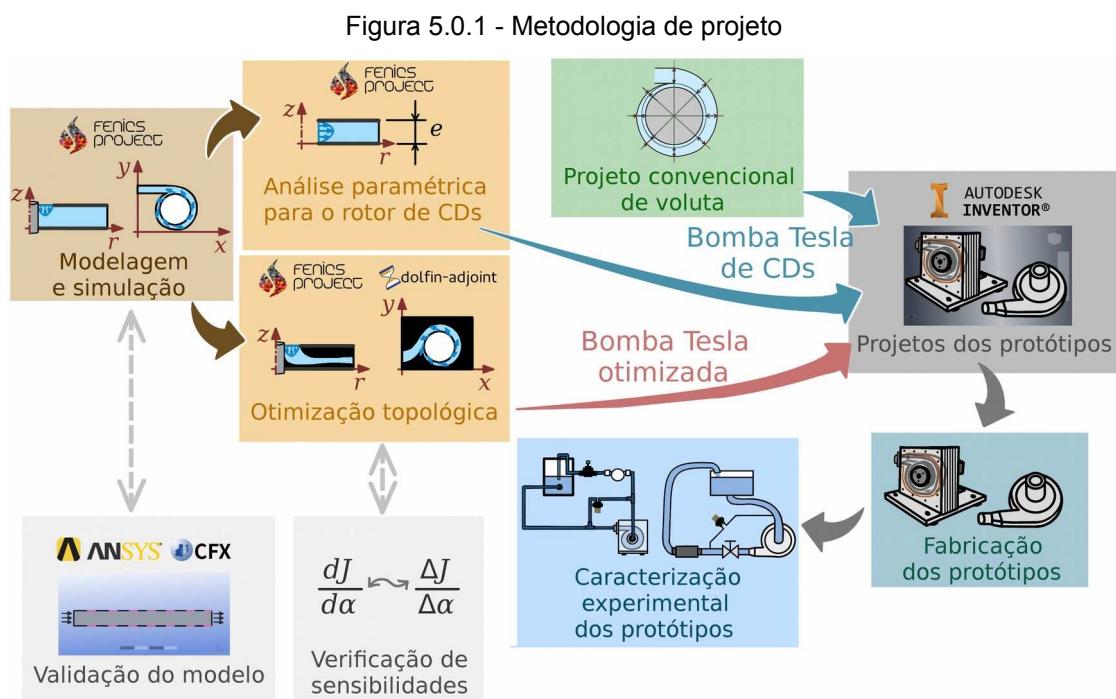
$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{d\Phi_{abs}}{d\alpha} \quad (4.6.9)$$

A equação acima calculada pelo método adjunto é dada por

$$\left( \frac{d\Phi_{abs}}{d\alpha} \right)^* = \left( \frac{\partial\Phi_{abs}}{\partial\alpha} \right)^* - \left( \frac{\partial F}{\partial\alpha} \right)^* \cdot \lambda_\Phi , \quad \left( \frac{\partial F}{\partial\mathbf{u}} \right)^* \cdot \lambda_\Phi = \left( \frac{\partial\Phi_{abs}}{\partial\mathbf{u}} \right)^* \quad (4.6.10)$$

## 5 ABORDAGEM METODOLÓGICA

A metodologia seguida está ilustrada na figura 5.0.1.



Fonte: Própria

Os passos seguidos estão descritos a seguir.

### 1. Modelagem e simulação

A modelagem e a simulação foram feitas no *software* FEniCS, para operação com um fluido *newtoniano* (água) em escoamento laminar.

### 2. Verificação do modelo

Modelagem e simulação da bomba Tesla no *software* comercial de elementos finitos ANSYS® CFX, de modo a comparar com os resultados obtidos no modelo implementado no FEniCS.

### **3. Análise paramétrica para o rotor de CDs**

Análise do espaçamento ótimo entre discos (CDs), seguida de simulação da configuração ótima.

### **4. Projeto convencional de voluta**

Projeto convencional de voluta para a bomba Tesla de CDs.

### **5. Otimização topológica**

Otimização topológica para o rotor e para a voluta da bomba Tesla por meio de dois modelos 2D independentes.

### **6. Verificação de sensibilidades**

Verificação do cálculo de sensibilidades (gradientes, derivadas) realizado pelo *dolfin-adjoint* (método adjunto), por meio do *Método de Diferenças Einitas* (MDF).

### **7. Projeto do protótipo**

Projeto da bomba Tesla de CDs em um *software CAD* (como o Autodesk® Inventor).

### **8. Fabricação do protótipo**

Fabricação do protótipo de CDs por manufatura convencional, e fabricação do protótipo otimizado por manufatura aditiva (impressora 3D).

### **9. Caracterização experimental dos protótipos**

A caracterização experimental dos protótipos fabricados é feita quanto a vazão e a pressão, por meio de bancadas de testes.

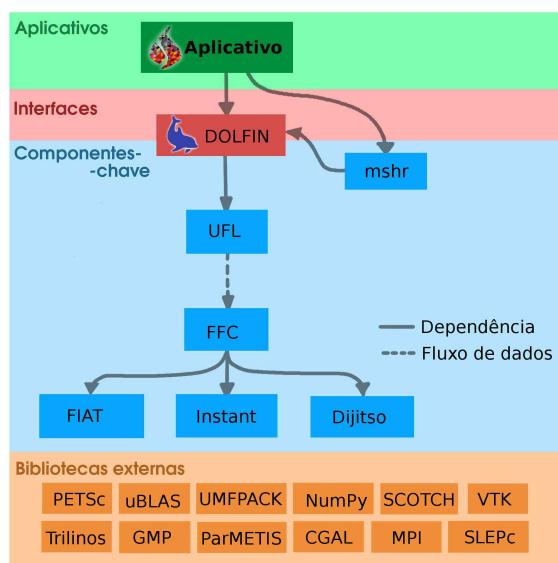
## 6 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

As implementações do Método de Elementos Finitos (MEF) e de otimização foram feitas na plataforma FEniCS (descrita na seção a seguir). Os resultados do modelo implementado no FEniCS foram validados utilizando-se o *software* comercial ANSYS® CFX.

### 6.1 MODELAGEM E SIMULAÇÃO NO FEniCS

FEniCS (*Finite Element Computational Software*) é uma plataforma computacional de resolução de equações diferenciais parciais (EDP) usando elementos finitos a partir de abstração matemática (LANGTANGEN e LOGG, 2016, p. 3), isto é, a partir da forma variacional (“forma integral”) do problema. O projeto FEniCS foi iniciado em 2003 como um projeto colaborativo entre a Universidade de Chicago e a Universidade Técnica Chalmers. O FEniCS é formado por diversos componentes de *software* livre (*open source*) inter-relacionados. Os seus principais componentes podem ser vistos na figura 6.1.1.

Figura 6.1.1 - Visão esquemática dos principais componentes do FEniCS e seus inter-relacionamentos



Fonte: Própria (baseado em Logg et al. (2012, p. 174) e FENICS BITBUCKET)

Um aplicativo (programa) elaborado no ambiente de desenvolvimento do FEniCS pode ser implementado diretamente por meio da biblioteca DOLFIN. O DOLFIN (*Dynamic Object-oriented Library for  $\text{FInite element computation}$* ) é uma biblioteca de resolução de equações diferenciais em C++ e Python, que implementa estruturas de dados (malhas, espaços de funções, interfaces para softwares de álgebra linear etc.), e faz toda a comunicação entre os componentes do FEniCS.

As equações diferenciais são especificadas na forma variacional por meio da linguagem UFL (*Unified Form Language*), sendo passadas para o compilador FFC (*FEniCS Form Compiler*). A geração de código utilizando FFC depende do pacote FIAT (*FInite element Automatic Tabulator*), que implementa as funções base de elementos finitos, do Instant, que converte Python para C++, e do Dijitso (*Distributed just-in-time shared library building*), que faz compilação JIT (*Just-in-time*) de código C++. Para resolução de problemas de otimização em cima do método de elementos finitos, é utilizado o compilador UFLACS (*UFL Analyser and Compiler System*), que possivelmente irá substituir o FFC em uma versão futura do FEniCS.

Cabe destacar a biblioteca mshr (*mesh generation*), que serve para geração de malhas de elementos finitos não-estruturadas por CSG (“*Constructive Solid Geometry*”) para o DOLFIN, porque o DOLFIN só consegue gerar malhas de elementos finitos estruturadas mais simples (i.e., somente com formatos geométricos básicos (“*built-in meshes*”): intervalo, quadrado, retângulo, cubo e paralelepípedo retângulo).

O DOLFIN também pode ser descrito como um “montador” (“*assembler*”), que monta as matrizes que correspondem ao problema variacional e as envia para resolução em bibliotecas externas de *software* (como o PETSc), utilizando também outros pacotes externos de *software*. Alguns desses pacotes externos são mostrados na figura 6.1.1 e podem ser vistos abaixo:

- Bibliotecas de resolvedores de EDPs (equações diferenciais parciais) (“*linear algebra backends*”): PETSc (*default*), Trilinos, uBLAS, MTL4.
- Bibliotecas de particionamento de malhas para processamento em paralelo (“*mesh partitioners*”) (LOGG et al., 2012, p. 217): SCOTCH (*default*), ParMETIS.

- Biblioteca de computação paralela em memória distribuída: MPI (*Message Parsing Interface*).
- Biblioteca de resolução de problemas de autovalor: SLEPc (utilizada em conjunto com o PETSc) .
- Bibliotecas de resolvedores de sistemas lineares esparsos: UMFPACK, MUMPS.
- Biblioteca de árvore de busca para busca das células da malha de elementos finitos: CGAL (usada pelo DOLFIN).
- Biblioteca de operações aritméticas de precisão: GMP (usada pelo CGAL).
- Biblioteca para representação de valores de matrizes e vetores: NumPy (usada pelo DOLFIN).
- Biblioteca para salvar visualização para o ParaView: VTK (“*Visualization Tool Kit*”).

A interface principal do FEniCS é a de Python (apesar de possuir também uma interface C++), tendo que ser importada no início do código. Para importar a biblioteca principal do FEniCS (DOLFIN), utiliza-se “`from dolfin import *`”, o que equivale escrever “`from fenics import *`”. Caso precise da biblioteca mshr, ela tem que ser importada separadamente, por “`from mshr import *`”.

A versão utilizada do FEniCS é a versão 2016.2.0, lançada em 6 de Dezembro de 2016. Atualmente, o FEniCS suporta somente a utilização de elementos triangulares/tetraédricos na geração de malhas de elementos finitos. Em conjunto com essa versão, foi utilizado Python em sua versão 2.7.12. A versão do otimizador IPOPT utilizado é 3.12.6.

A biblioteca de resolvedores de EDPs (*Equações Diferenciais Parciais*) (“*linear algebra backend*”) (*linear algebra backend*) sendo utilizada é o PETSc (LANGTANGEN e LOGG, 2016, p. 115).

Para visualização de malhas de elementos finitos e resultados das simulações foi utilizada a biblioteca Matplotlib e o software ParaView 5.2.0.

### 6.1.1 Simulação no FEniCS

Como a análise de elementos finitos sendo realizada considera **regime permanente**, pode-se resolver o problema variacional por meio de métodos iterativos como o Método de Newton-Raphson.

A equação que define o problema variacional no FEniCS é a somatória de todas as funções residuais (equação (4.2.19)),

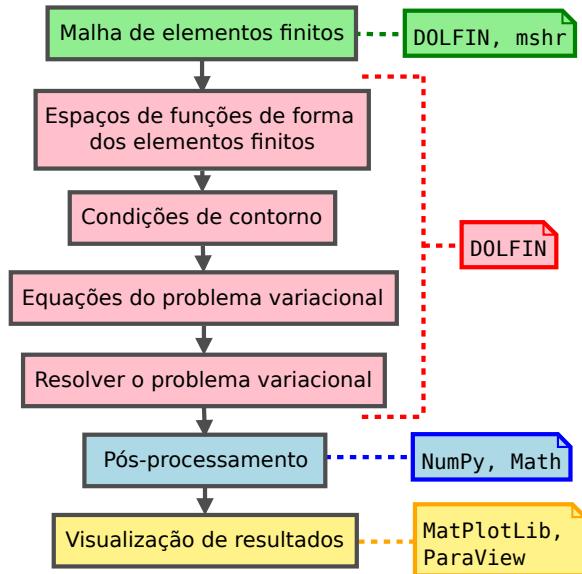
$$F_j = \hat{R}_{c,j} + \hat{R}_{m,j,r} + \hat{R}_{c,j,\theta} + \hat{R}_{c,j,z} = 0 \quad (6.1.1)$$

Para se resolver o problema variacional pelo Método de Newton-Raphson, utilizou-se o resolvedor MUMPS (*MUltifrontal Massively Parallel sparse direct Solver*) (AMESTOY et al., 2005), que é capaz de resolver sistemas lineares grandes, esparsos e assimétricos, como é o caso da forma matricial da equação (6.1.1), porque cada elemento finito só consegue, em princípio, ser influenciado pelos seus vizinhos diretos. Os resolvedores de matrizes esparsas do MUMPS foram usados no ambiente da biblioteca de resolvedores de EDPs (Equações Diferenciais Parciais) (“*linear algebra backend*”) PETSc.

Segundo o Método de Galerkin, o FEniCS considera  $w_{p,j} = \chi_j$  e  $w_{v,j,r} = w_{v,j,\theta} = w_{v,j,z} = \phi_j$  na hora de resolver as equações.

O procedimento seguido no FEniCS para implementar o Método de Elementos Finitos está resumido na figura 6.1.2.

Figura 6.1.2 - Procedimento seguido no FEniCS para implementar o Método de Elementos Finitos



Fonte: Própria

Assim, primeiramente define-se a malha de elementos finitos utilizando o DOLFIN (ou a biblioteca mshr). Em seguida, definem-se os espaços de funções de forma dos elementos finitos, de forma a montar um elemento de Taylor-Hood. Definem-se as condições de contorno e a equação do problema variacional. No FEniCS, a equação que define o problema variacional é especificada na linguagem UFL (*Unified Form Language*), baseada em abstração matemática. Pode-se observar abaixo a implementação da equação (6.1.1), comparando-se com as equações (4.2.15) e (4.2.16):

```

F = (
    # Equação da continuidade
    div_c(v) * w_p * r_ * dx

    # Equações de Navier-Stokes
    + rho * inner( dot(grad_c(v), v), w_v ) * r_ * dx
    + inner( grad_c(w_v), T ) * r_ * dx
    - rho * inner( f, w_v ) * r_ * dx
    + 2 * rho * inner( cross( omega_vec, v ), w_v ) * r_ * dx
    + rho * inner( cross( omega_vec,
                           cross( omega_vec, s_coord ) ), w_v ) * r_ * dx
)
  
```

O tensor de tensões em coordenadas cilíndricas ( $T$ ) é definido utilizando-se a função `as_tensor`:

```
T = as_tensor([
    [-p + 2*mu_*Dx(vr, nr),
     mu_*(-vtheta/r_ + Dx(vtheta, nr)),
     mu_*(Dx(vz, nr) + Dx(vr, nz))],
    [mu_*(-vtheta/r_ + Dx(vtheta, nr)),
     -p + 2*mu_*vr/r_,
     mu_*Dx(vtheta, nz)],
    [mu_*(Dx(vz, nr) + Dx(vr, nz)),
     mu_*Dx(vtheta, nz),
     -p + 2*mu_*Dx(vz, nz)]])
```

em que  $Dx(vr, nr)$  denota a derivada de  $vr$  com relação a  $r$ .

Como os operadores de gradiente e divergente são definidos de forma diferente em coordenadas cilíndricas com relação a coordenadas cartesianas, deve-se definir funções que os calculem no código de FEniCS. Como no modelo 2D de escoamento girante não há variação na direção  $\theta$ , a derivada com relação a ela deve ser zero:  $\frac{\partial(\ )}{\partial\theta} = 0$ . Com essa simplificação, os operadores de gradiente e divergente de vetores ficam:

```
def div_c (a, mesh): #  $\nabla \cdot a$ 
    """
    Divergente ("divergent") em coordenadas cilíndricas, desconsiderando
    a componente tangencial.
    """
    (r_, z_) = SpatialCoordinate(mesh); nr = 0; nz = 1 # Coordenadas r e z

    if type(a).__name__ == 'ListTensor': # "a" é um vetor ("vector")
        ar = a[0]; atheta = a[1]; az = a[2] # Componentes de "a"
    else: # "a" é uma função ("Function")
        (ar, atheta, az) = split(a) # Ponteiros para as componentes de "a"

    return Dx(ar, nr) + ar/r_ + Dx(az, nz)

def grad_c (a, mesh): #  $\nabla a$ 
    """
    Gradiente ("gradient") em coordenadas cilíndricas, desconsiderando
    a componente tangencial.
    """
    (r_, z_) = SpatialCoordinate(mesh); nr = 0; nz = 1 # Coordenadas r e z

    if type(a).__name__ == 'ListTensor': # "a" é um vetor ("vector")
        ar = a[0]; atheta = a[1]; az = a[2] # Componentes de "a"
    else: # "a" é uma função ("Function")
        (ar, atheta, az) = split(a) # Ponteiros para as componentes de "a"

    return as_tensor([[Dx(ar, nr), -atheta/r_, Dx(ar, nz)],
                     [Dx(atheta, nr), ar/r_, Dx(atheta, nz)],
                     [Dx(az, nr), 0, Dx(az, nz)]])
```

O vetor de rotação e a posição em coordenadas cilíndricas para esse problema ficam:

```
# Vetor de rotação
omega_vec = as_vector([Constant(0), Constant(0), omega_])

# Posição em coordenadas cilíndricas
s_coord = as_vector([r_, Constant(0), z_])
```

Nota-se na equação de  $\mathbf{F}$  que a integral de contorno  $\oint_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w}_{v,j} \cdot \mathbf{r} \cdot d\Gamma$  não está representada, por causa das condições de contorno sendo utilizadas para o problema sendo resolvido.

Além de poder definir a equação do problema variacional na forma vetorial/matricial, pode-se defini-la, de forma equivalente, na forma das suas equações desdobradas (ver as equações (A.23) e (A.26), do “Apêndice A – Desenvolvimento detalhado do modelo 2D de escoamento girante”):

```
F = (
    # R_c: Equação da continuidade
    (vr/r_ + Dx(vr, nr) + Dx(vz, nz)) * w_p * r_*dx

    # R_mr: Equação de Navier-Stokes em r
    + (rho_*(vr*Dx(vr, nr) + vz*Dx(vr, nz) - vtheta**2/r_) * w_vr
       + (-p + 2*mu_*Dx(vr, nr)) * Dx(w_vr, nr)
       + (-p + 2*mu_*vr/r_) * w_vr/r_
       + mu_*(Dx(vz, nr) + Dx(vr, nz)) * Dx(w_vr, nz)
       - rho_*f_[0]*w_vr - 2*rho_*omega_*vtheta * w_vr
       ) * r_*dx
       - (rho_* omega_**2 * r_**2 * w_vr) * dx

    # R_mtheta: Equação de Navier-Stokes em theta
    + (rho_*(vr*Dx(vtheta, nr) + vz*Dx(vtheta, nz) + vtheta*vr/r_) * w_vtheta
       + mu_*(Dx(vtheta, nr) - vtheta/r_) * (Dx(w_vtheta, nr) - w_vtheta/r_)
       + mu_*Dx(vtheta, nz) * Dx(w_vtheta, nz)
       - rho_*f_[1]*w_vtheta + 2*rho_*omega_*vr * w_vtheta
       ) * r_*dx

    # R_mz: Equação de Navier-Stokes em z
    + (rho_*(vr*Dx(vz, nr) + vz*Dx(vz, nz)) * w_vz
       + mu_*(Dx(vz, nr) + Dx(vr, nz)) * Dx(w_vz, nr) +
       + (-p + 2*mu_*Dx(vz, nz)) * Dx(w_vz, nz) - rho_*f_[2] * w_vz
       ) * r_*dx
)
```

Para otimização topológica, o modelo de material deve ser incluído nas equações acima.

A verificação de convergência no FEniCS foi escolhida como sendo por meio de resíduos, sendo que o resíduo absoluto corresponde à norma  $L^2$  do valor máximo da equação (6.1.1), cujo valor desejado é zero, e o resíduo relativo corresponde à divisão do resíduo absoluto atual pelo resíduo absoluto inicial.

Após resolver o problema variacional, é feito um pós-processamento, para calcular parâmetros de interesse. A visualização de resultados é feita utilizando-se a biblioteca `Matplotlib` para plotagem de gráficos, e o *software* `ParaView`.

Para utilizar uma malha com formato mais complexo em simulação no FEniCS, pode-se gerá-la no ANSYS® e depois convertê-la para o formato do FEniCS (ver “Apêndice F – Implementação da modelagem e simulação no ANSYS® CFX”).

## 6.2 MODELAGEM E SIMULAÇÃO NO ANSYS®

Para validar e comparar os resultados do modelo computacional implementado no FEniCS, foi utilizado o *software* ANSYS.

O ANSYS® é um *software* comercial de simulação por meio de elementos finitos, incluindo módulos de simulação para fluidos, estruturas mecânicas, componentes eletrônicos, semicondutores, sistemas computacionais, *software* embarcado, e problemas multifísicos (envolvendo forças de fluido, térmicas, de integridade estrutural, radiação eletromagnética etc.) (ANSYS).

No caso de simulação com fluidos (DFC Dinâmica dos Fluidos Computacional, *CFD Computational Fluid Dynamics*), há duas opções no ANSYS®: CFX e Fluent, sendo que ambas utilizam o método de volumes finitos. Para simular a bomba Tesla, foi utilizado o ANSYS® CFX, para modelo 2D de escoamento girante e referencial rotativo.

O procedimento e detalhes de implementação seguidos para modelagem e simulação no ANSYS® CFX estão descritos no “Apêndice F – Implementação da modelagem e simulação no ANSYS® CFX”.

Os principais parâmetros utilizados na simulação no ANSYS® CFX estão resumidos na tabela 6.2.1.

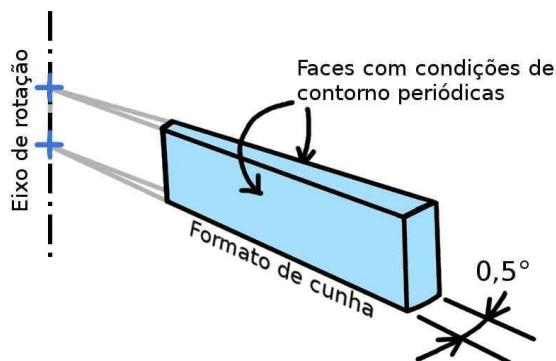
Tabela 6.2.1 - Principais parâmetros utilizados na simulação no ANSYS® CFX

Simulation Definition (em "Quick Setup Mode")		
Simulation Data	Problem Type	<b>Single Phase</b>
Working Fluid	Fluid	<b>Water</b>
Physics Definition (em "Quick Setup Mode")		
Analysis Type	Type	<b>Steady State</b>
Model Data	Reference Pressure	<b>1 [atm]</b>
	Heat Transfer	<b>None</b>
	Turbulence	<b>Laminar</b>

### 6.2.1 Modelo 2D de escoamento girante no ANSYS® CFX

O ANSYS® CFX opera somente em espaço 3D (ao contrário do ANSYS® Fluent). Assim, é necessário utilizar uma malha 3D que equivalha a uma malha 2D. Para um modelo 2D de escoamento girante, segundo PADT, utilizam-se fronteiras de periodicidade. Esse modelo está ilustrado na figura 6.2.1 para o modelo de fluido entre 2 discos. O ângulo de cunha foi selecionado como sendo  $0,5^\circ$ .

Figura 6.2.1 - Modelo 2D de escoamento girante para modelo de fluido entre 2 discos



Fonte: Própria

## 6.3 OTIMIZAÇÃO NO FEniCS

Existem basicamente dois tipos de formulação que podem ser utilizados para resolução de um problema de otimização no FEniCS: formulação “*one-shot*” (“*one-shot formulation*”), em que as variáveis de estado são consideradas independentes das variáveis de projeto, e formulação reduzida (“*reduced formulation*”), em que as variáveis de estado são consideradas funções das variáveis de projeto.

A formulação “*one-shot*” é feita pela definição da função Lagrangeana no FEniCS e resolvendo, com o comando `solve`, o problema para o variacional da função Lagrangeana, a partir de uma estimativa inicial para as variáveis de estado. A vantagem dessa formulação é que ela permite que as variáveis de estado sejam calculadas em paralelo às variáveis de projeto.

A formulação reduzida pode ser feita pelo método adjunto, que é implementado pela biblioteca `dolfin-adjoint`. Esta formulação é, ao contrário da formulação “*one-shot*”, mais eficiente quanto menor o número de funcionais e maior o número de parâmetros (FARRELL, 1, 2017). A desvantagem é que as variáveis de estado tem que ser calculadas simultaneamente às variáveis de projeto.

A otimização topológica no FEniCS foi implementada utilizando-se o método adjunto, disponível na biblioteca `dolfin-adjoint`, com base no exemplo de escoamento de Stokes do *site* do `dolfin-adjoint` (FARRELL, 3, 2017).

### 6.3.1 Dolfin-adjoint

Segundo Farrell et al. (2015), a biblioteca `dolfin-adjoint` deriva e resolve automaticamente as equações adjunta e linear tangente a partir de especificações matemáticas de alto nível relativas a discretizações, em elementos finitos, de equações diferenciais parciais (EDPs). Essa derivação é feita a partir da interface Python do FEniCS (FARRELL et al., 2013, p. 9). A integração do `dolfin-adjoint` com o FEniCS pode ser observada na figura 6.3.1.

Figura 6.3.1 - Integração do FEniCS com o `dolfin-adjoint`

Fonte: Própria (baseada em Farrell et al. (2015))

A partir das equações simbólicas do problema (“equações diretas”) definidas em linguagem UFL, o `dolfin-adjoint` deriva simbolicamente as equações adjuntas correspondentes, enquanto que a plataforma FEniCS se encarrega de gerar o código computacional pelo compilador FFC.

A principal biblioteca do `dolfin-adjoint` e que implementa o método adjunto é a biblioteca `libadjoint`. A biblioteca possui duas tarefas principais (FARRELL et al., 2013, p. 6): anotações (“*annotations*”) e chamadas (“*callbacks*”). No caso das anotações, a cada equação resolvida, são armazenados na memória todos os operadores (matrizes) da equação e todas as dependências de variáveis de interesse (FARRELL e FUNKE, 2017). Esse armazenamento é feito por meio de uma fita (“*tape*”) e possibilita a derivação dos modelos linear tangente e adjunto. Já as chamadas servem para o `dolfin-adjoint` fazer a computação necessária entre passos de otimização.

A versão do `dolfin-adjoint` utilizada neste projeto é a mesma do FEniCS: 2016.2.0.

### 6.3.2 IPOPT

O `dolfin-adjoint` pode ser configurado com diferentes algoritmos de otimização. Um algoritmo disponível é o IPOPT (“*Interior Point OPTimizer*”), que é um algoritmo de otimização não-linear em larga escala. Esse algoritmo consiste primeiramente em converter o problema de otimização original em um problema

equivalente em que as restrições de ineqüaldaade estão somente nas variáveis de projeto (WÄCHTER, 2009, p. 7). Em seguida, ele substitui as restrições de ineqüaldaade por uma barreira logarítmica somada na função objetivo. Então o problema de otimização fica (WÄCHTER, 2009, p. 8):

$$\begin{array}{ll} \min_x f(x) - \mu \cdot \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \\ \text{tal que} \\ c(x) = 0 \end{array} \quad (6.3.1)$$

em que

$\mu$  : Parâmetro de barreira ( $\mu > 0$ ).

$x$  : Variáveis de projeto do problema equivalente.

$c(x) = 0$  : Restrições de igualdade do problema equivalente.

A influênciada barreira é dada por  $\mu$  e, à medida que ele diminui, a solução do problema de otimização com barreira converge para a solução do problema de otimização original (WÄCHTER e BIEGLER, 2005).

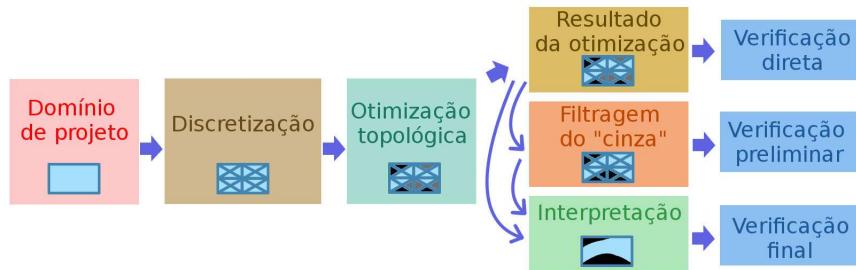
Para cada valor da barreira, realiza-se uma busca do ponto de ótimo com o algoritmo de busca de filtro de ponto interior (“*Interior Point Filter Line Search*”) (WÄCHTER e BIEGLER, 2005).

Para acessar o algoritmo do IPOPT no código FEniCS, utiliza-se a biblioteca de conexão PyIPOPT.

### 6.3.3 Procedimento de otimização topológica

O procedimento utilizado para otimização topológica está ilustrado na figura 6.3.2.

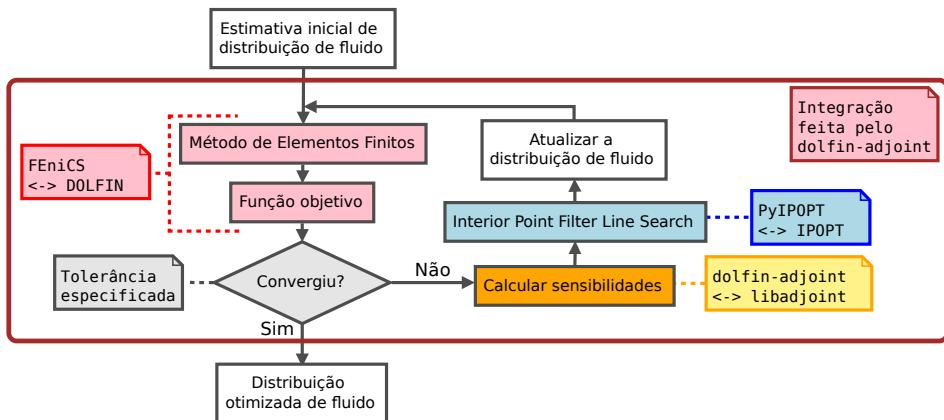
Figura 6.3.2 - Procedimento de análise para otimização topológica ilustrando alguns tipos de verificação do resultado da otimização



Fonte: Própria

O domínio de projeto é inicialmente discretizado, formando uma malha de elementos finitos. A malha de elementos finitos é utilizada na otimização topológica, cujo algoritmo está ilustrado na figura 6.3.3.

Figura 6.3.3 - Fluxograma da implementação de otimização topológica



Fonte: Própria (baseada em Sá (2016, p. 54))

Em seguida, no resultado da otimização topológica (figura 6.3.2), pode ser feito um pós-processamento com a filtragem do “cinza” (i.e., a eliminação do “cinza” em favor de uma distribuição binária, em que se tem somente fluido ou somente sólido), o que evita o efeito do modelo de material criar uma zona de influência ao seu redor, que é tão grande quanto forem, principalmente,  $K_{máx}$  e  $q$ . Para isso, pode-se utilizar um filtro na variável de projeto  $\alpha$ , na forma de uma função degrau:

$$\alpha_{filtrado} = \begin{cases} 1 \text{ (fluido), se } \alpha \geq 0,5 \\ 0 \text{ (sólido), se } \alpha < 0,5 \end{cases} \quad (6.3.2)$$

Com uma distribuição binária na variável de projeto  $\alpha$ , pode-se cortar a malha de elementos finitos de forma a se fazer uma verificação preliminar da distribuição otimizada.

Na figura 6.3.2, a “interpretação” é a suavização dos contornos do resultado final de otimização topológica por meio de *splines* ou *nurbs*. Então pode ser verificada, efetivamente, a sua adequação ao projeto.

## 7 METODOLOGIA EXPERIMENTAL

A metodologia experimental consiste de três etapas: projetos dos protótipos, fabricação dos protótipos e montagens experimentais (ver a figura 7.0.1). Eles estão descritos nas subseções seguintes.

Figura 7.0.1 - Esquema da metodologia experimental



Fonte: Própria

### 7.1 PROJETOS DO PROTÓTIPOS

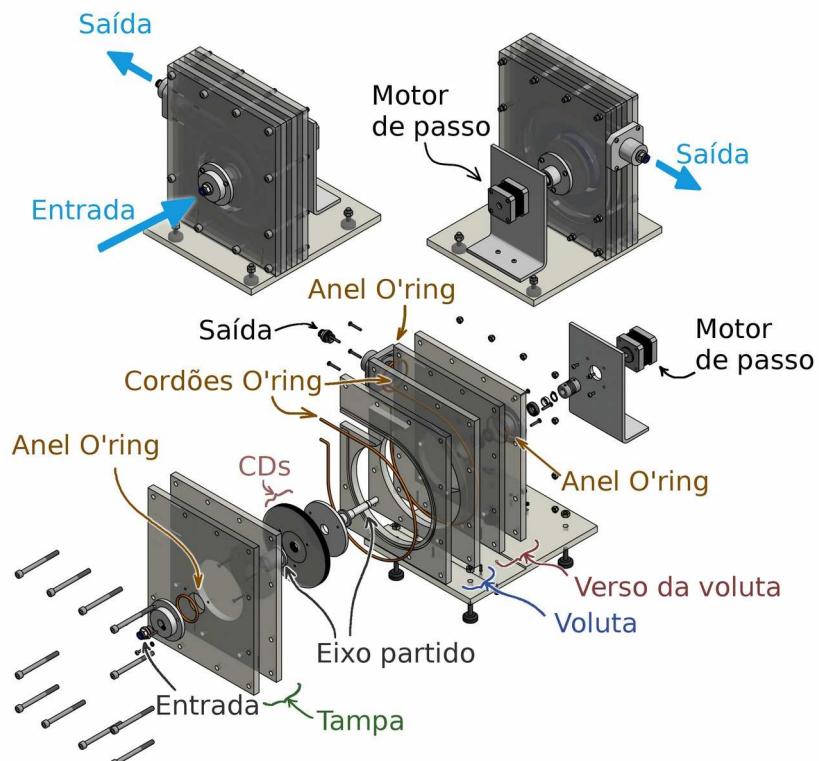
Para a parte experimental, foram projetados 2 tipos de protótipos: bomba Tesla de CDs por análise paramétrica, e bomba Tesla por otimização topológica (“mini bomba Tesla”).

Os componentes principais da bomba Tesla são os mesmos de uma bomba centrífuga de palhetas, consistindo basicamente de um rotor, um motor e uma envoltória. Os pontos mais importantes que devem ser levados em consideração em projetos de bombas de fluidos são: o formato da voluta, a perda de carga e a vedação. Os desenhos técnicos estão no “Apêndice G – Desenhos técnicos”.

#### 7.1.1 Projeto de bomba Tesla de CDs

O modelo 3D da bomba Tesla de CDs foi elaborado no *software Autodesk Inventor®* (figura 7.1.1).

Figura 7.1.1 - Modelo 3D da bomba Tesla



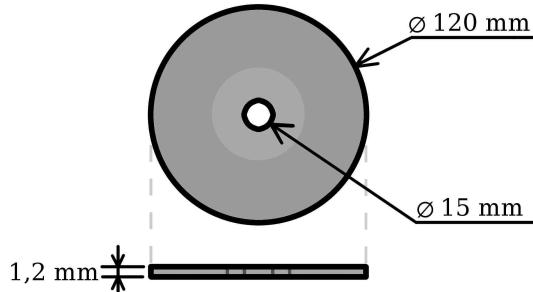
Fonte: Própria (3D elaborado no Autodesk® Inventor)

A seguir, são descritos os seguintes componentes do projeto: discos, espaçadores, voluta, eixo, vedação, bocais e acionamento.

### **Discos**

Os discos da bomba Tesla são CDs. Um CD é formado principalmente por um substrato de policarbonato (PC) transparente sobre o qual são depositadas outras camadas mais finas para gravar dados. As dimensões de um CD comum estão indicadas na figura 7.1.2.

Figura 7.1.2 - Dimensões de um CD



Fonte: Própria

Para determinar a máxima rotação admissível para os discos de um dispositivo Tesla, Holland (2015, p. 36) utilizou a equação da rotação máxima admissível para disco furado de espessura constante:

$$\omega_{máx} = \sqrt{\frac{8 \cdot g \cdot \bar{\sigma}}{(3 + \nu) \cdot \rho \cdot r_{ext}} \cdot \left( \frac{1}{2 + \left( \frac{r_{int}}{r_{ext}} \right)^2 \cdot \left[ 1 - \frac{1 + 3 \cdot \nu}{3 + \nu} \right]} \right)} \quad (7.1.1)$$

em que

$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{LE}}{f_s}$  : Tensão admissível (Pa).

$\sigma_{LE}$  : Tensão limite de escoamento (Pa).

$f_s$  : Fator de segurança.

$g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$  : Aceleração da gravidade.

$\nu$  : Coeficiente de Poisson.

$\rho$  : Densidade (massa específica) do material do disco.

$r_{ext}$  : Raio externo do disco.

$r_{int}$  : Raio interno do disco.

Assumindo-se que um CD seja composto somente de policarbonato transparente, tem-se que as suas propriedades são:

$$v = 0,36 \text{ (CALLISTER, 2012, p. 646)}$$

$$\rho = 1,20 \text{ g/cm}^3 = 1200 \text{ kg/m}^3 \text{ (CALLISTER, 2012, p. 641)}$$

$$\sigma_{LE} = 52,1 \text{ MPa} \text{ (CALLISTER, 2012, p. 650)}$$

Assim, assumindo-se fator de segurança  $f_s = 1,5$ , tem-se:

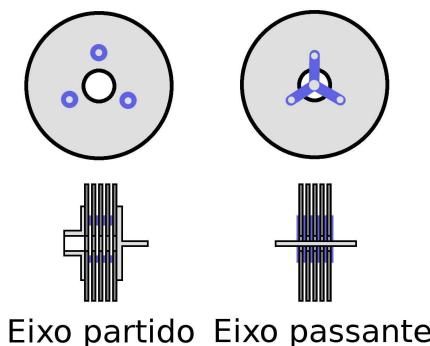
$$\omega_{máx} = 1690 \text{ rad/s} \Rightarrow n_{máx} = 16129 \text{ rpm} \quad (7.1.2)$$

Assim, a rotação máxima consiste em um valor muito elevado, que não é alcançado durante os testes de operação.

### Espaçadores

Existem basicamente duas opções de espaçadores entre discos para bomba Tesla (ver a figura 7.1.3): de eixo partido (DODSWORTH (2016, p. 39)) e de eixo passante (LIMA et al., 2013). Como o eixo passante cria um bloqueio adicional no escoamento de entrada da bomba Tesla, optou-se por utilizar um eixo partido.

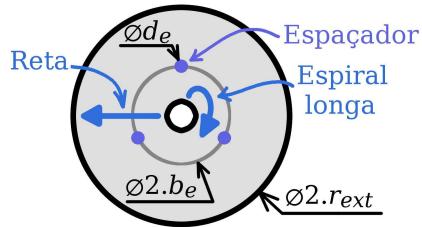
Figura 7.1.3 - Duas alternativas para o espaçamento entre discos



Fonte: Própria

Para avaliar o efeito dos espaçadores de discos, Dodsworth (2016, p. 39) analisou a razão de bloqueio (“*blockage ratio*”) em dois casos extremos: escoamento em reta e escoamento em espiral longa (figura 7.1.4).

Figura 7.1.4 - Posicionamento dos espaçadores, que são, no caso, três



Fonte: Própria (baseada em Dodsworth (2016, p. 40))

As equações de cálculo nos dois casos mencionados são dadas por:

$$Br_{\text{reta}} = \frac{3 \cdot d_e}{2 \cdot \pi \cdot b_e} \quad (7.1.3)$$

$$Br_{\text{espiral longa}} = \frac{d_e}{r_{\text{ext}}} \quad (7.1.4)$$

em que

 $d_e$  : Diâmetro externo dos espaçadores. $b_e$  : Raio em que estão localizados os espaçadores. $r_{\text{ext}}$  : Raio externo do disco.

No caso de CDs e escolhendo-se os espaçadores, tem-se:

$$d_e = 6 \text{ mm}$$

$$b_e = 30 \text{ mm}$$

$$r_{\text{ext}} = \frac{120}{2} = 60 \text{ mm}$$

Portanto, as razões de bloqueio extremas ficam:

$$Br_{\text{reta}} = 9,55 \% \quad (7.1.5)$$

$$Br_{\text{espiral longa}} = 10 \% \quad (7.1.6)$$

Com relação aos valores acima, o projeto feito por Dodsworth (2016, p. 39) resultou em 7 % e 28,5 %, respectivamente. Assim, os valores escolhidos parecem ser razoáveis, indicando pouca influência dos espaçadores no escoamento.

### **Voluta**

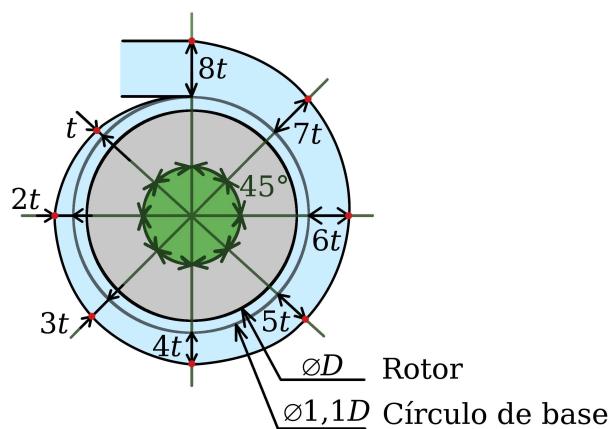
A voluta é a carcaça da bomba em forma de espiral, com a área de seção transversal aumentando ao se aproximar da saída. O seu objetivo é converter a energia cinética do fluido (i.e., a vazão volumétrica) em pressão. Segundo Lobanoff e Ross (1910, p. 50), ela não tem parte na geração de carga no escoamento e, portanto, trataria somente de minimizar perdas.

Segundo Lobanoff e Ross (1910, p. 52), os projetos de voluta podem possuir um caminho único de fluido (mais simples) ou mais caminhos, por meio de divisores de escoamento (“*splitters*”), ou também possuir um formato circular.

A voluta foi projetada com base na “voluta retangular universal” (LOBANOFF e ROSS, 1910, p. 59), que é uma voluta de caminho único de fluido com seção transversal retangular.

Segundo Tuzson (2000, p. 145), a voluta é projetada a partir de um “círculo de base” em distância maior do que 10 % do raio do rotor. Escolhendo-se o “círculo de base” com uma distância de 10 % do raio do rotor, o projeto da voluta pode ser visto na figura 7.1.5.

Figura 7.1.5 - Voluta retangular considerada no projeto

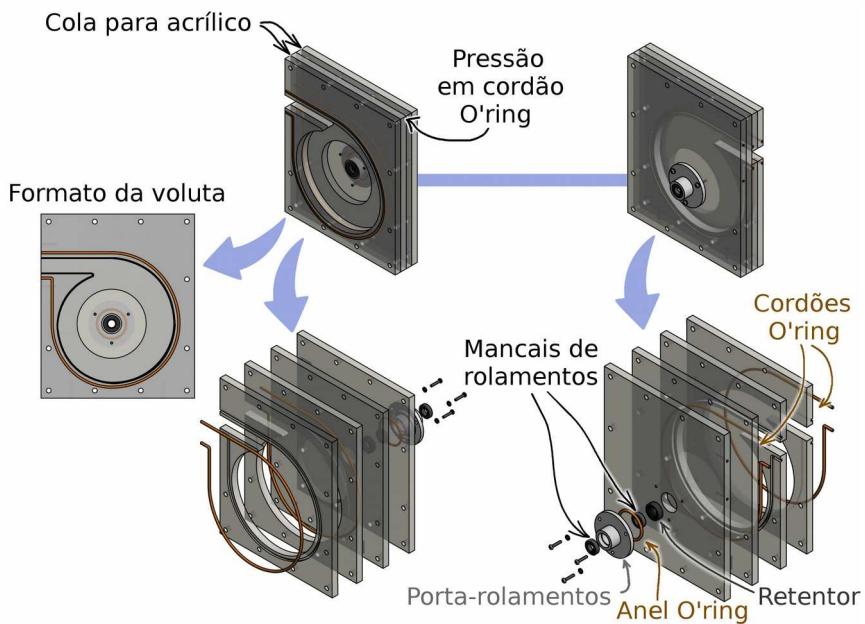


Fonte: Própria (baseada em Lobanoff e Ross (1910, p. 50))

Neste projeto, o diâmetro dos discos é de 120 mm (diâmetro de CD) e o espaçamento  $t$  escolhido é de 2,5 mm (para a saída estar em  $8.t = 20$  mm). A voluta projetada pode ser vista na figura 7.1.6.

A voluta foi projetada com formato espiral, sendo que atrás dela ficam os dois mancais de rolamentos para apoio do eixo. As duas partes são compostas de 2 chapas de acrílico cada, sendo que as chapas de cada parte são unidas com cola para acrílico. Para juntar a voluta com o resto da bomba Tesla de CDs, utilizaram-se cordões *O'ring* de silicone pressionados por parafusos.

Figura 7.1.6 - Voluta projetada



Fonte: Própria (3D elaborado no Autodesk® Inventor)

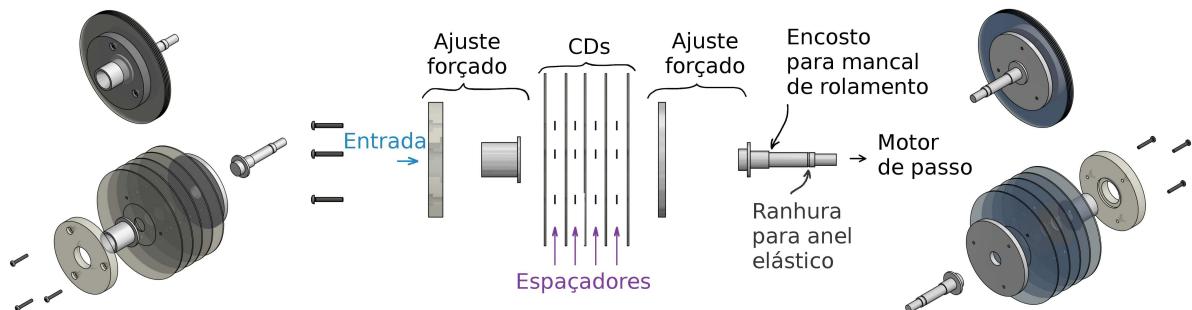
O posicionamento dos parafusos foi feito de forma a possibilitar uma possível utilização de uma voluta com formato otimizado no protótipo.

## Eixo

Optou-se por utilizar alumínio como material do eixo. Como existe contato com água, uma opção melhor, só que com maior custo, seria a utilização de cobre. O alumínio possui uma taxa de corrosão em água considerável, mas, como existe a

formação de uma camada apassivadora de alumina (óxido de alumínio,  $Al_2O_3$ ), ela não se torna excessivamente intensa, apesar de parte dessa camada poder ser retirada com o movimento rotativo dos discos. A figura 7.1.7 mostra o eixo projetado.

Figura 7.1.7 - Eixo projetado



Fonte: Própria (3D elaborado no Autodesk® Inventor)

Para apoiar o eixo da bomba Tesla, optou-se por utilizar mancais de rolamentos com vedação. No projeto de bomba Tesla, os mancais de rolamentos devem possuir o anel interno girando com o eixo e o anel externo estacionário (preso na carcaça da bomba). Assim, tem-se, principalmente, carga rotativa no anel interno e carga estática no anel externo. Segundo o catálogo da NSK (NSK, p. A82), para esse caso, o ajuste é feito por interferência no anel interno, e com folga no anel externo. Isso permite a montagem dos mancais de rolamento primeiro nos eixos e depois na carcaça. A seleção do modelo de mancal de rolamento e tolerâncias está resumida na tabela 7.1.1.

Tabela 7.1.1 - Escolha dos mancais de rolamentos e tolerâncias do eixo e do alojamento (segundo NSK para eixos de aço)

Mancal de rolamento		Tolerâncias recomendadas (NSK, p. A84 e A85)		Valores de tolerâncias (NSK, p. C18 e C20)	Tolerância selecionada
Modelo	Diâmetros				
6800 com vedação (Largura: $B = 5$ mm Arredondamento dos cantos: $r = 0,3$ mm)	Eixo	10 mm	js5 (carga leve)	js5: $\pm 3 \mu m$	js5: $\pm 3 \mu m$
	Alojamento	19 mm	H6 ou H7 (permitem movimento axial com facilidade)	H6: $\begin{cases} +13 \mu m \\ 0 \mu m \end{cases}$ H7: $\begin{cases} +21 \mu m \\ 0 \mu m \end{cases}$	H7: $\begin{cases} +21 \mu m \\ 0 \mu m \end{cases}$

Como alojamento dos mancais de rolamento, optou-se pela fabricação de um porta-rolamentos (indicado na figura 7.1.6), o que evita contato direto do eixo com o acrílico e consequente desgaste do acrílico.

### **Vedaçāo**

Para vedação, optou-se por vedar a caixa com a voluta usando cordão *O'ring* de silicone (indicado na figura 7.1.1). Para o eixo, escolheram-se mancais de rolamentos com vedação, e um retentor (RS R5 12x22x7 (VEDABRAS, 2012, p. 254)) para garantir que não haja vazamentos (indicados na figura 7.1.6). Além disso, optou-se por utilizar anéis *O'ring* para a entrada, a saída e o porta-rolamentos. Foram deixados 0,2 mm de pressão nos cordões e anéis *O'ring*.

### **Bocais**

Utilizaram-se bocais de circuito pneumático/hidráulico, para simplificar a integração da bomba Tesla de CDs com uma bancada experimental com componentes desse tipo.

### **Acionamento**

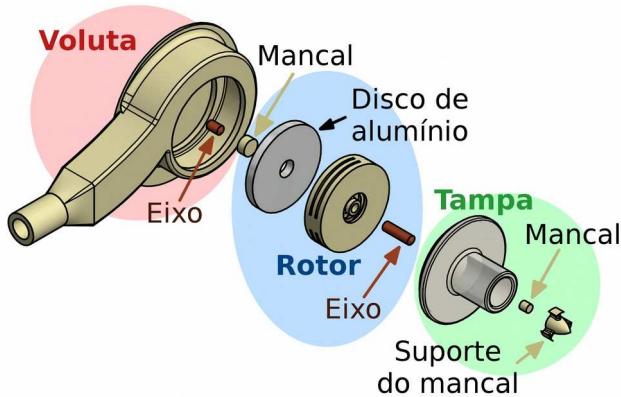
Para acionamento da bomba Tesla, optou-se pela utilização de um motor de passo (Minebea Matsushita 17PM-K049B), pela possibilidade de controle em malha aberta em rotação precisa, com um acoplamento flexível, e pela sua capacidade de absorver vibrações (indicado na figura 7.1.1).

#### **7.1.2 Projeto de mini bomba Tesla**

Para a bomba Tesla otimizada foram projetadas a voluta e o rotor. O esquema do protótipo utilizado é o que está sendo utilizado pelo aluno de doutorado

Luís Fernando Nogueira de Sá e pelo professor Oswaldo Horikawa. O esquema de montagem da bomba Tesla está na figura 7.1.8.

Figura 7.1.8 - Esquema de montagem da bomba Tesla otimizada



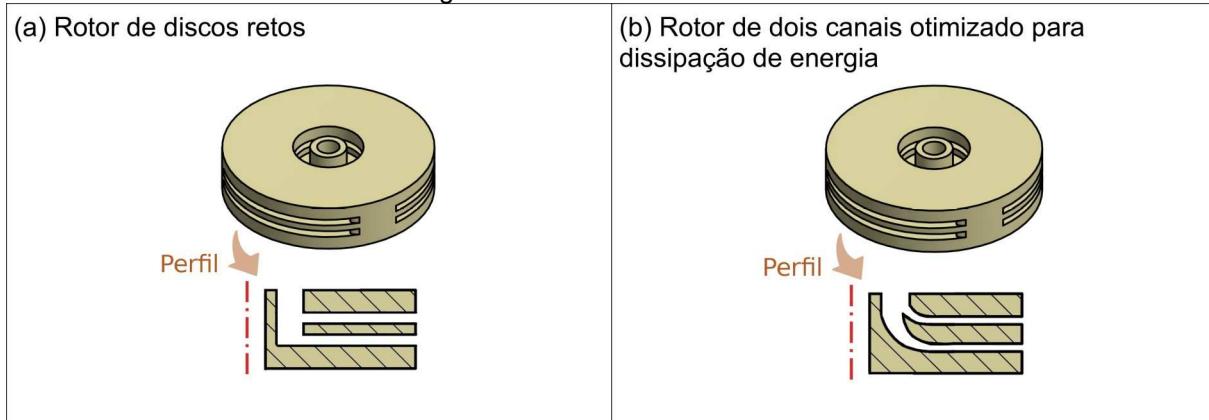
Fonte: Própria (3D elaborado no Autodesk® Inventor)

O rotor da bomba Tesla é colado a um disco de alumínio (para acionamento eletromagnético sem contato por meio de um motor de corrente contínua), a um mancal de UHM (“*Ultra High Molecular weight polyethylene*”, polietileno de ultra alto peso molecular) e a um pequeno eixo de latão. Na voluta, é colado um outro pequeno eixo de latão. Na tampa, deixa-se possível ajuste de posição do suporte do mancal, em que é colado um pequeno mancal de UHM.

O rotor otimizado fabricado é o rotor de bomba Tesla com entrada vertical de dois canais para 500 rpm e 0,5 L/min (ver a seção “8.5.2 Bomba Tesla de entrada vertical”). Para comparação, também foram fabricados um rotor de discos retos e uma voluta comum (i.e., projetada convencionalmente, sem otimização, conforme a figura 7.1.5), de tal forma que o volume de fluido que consegue ficar dentro de cada um deles fosse igual ao volume de fluido dentro do rotor e da voluta otimizados.

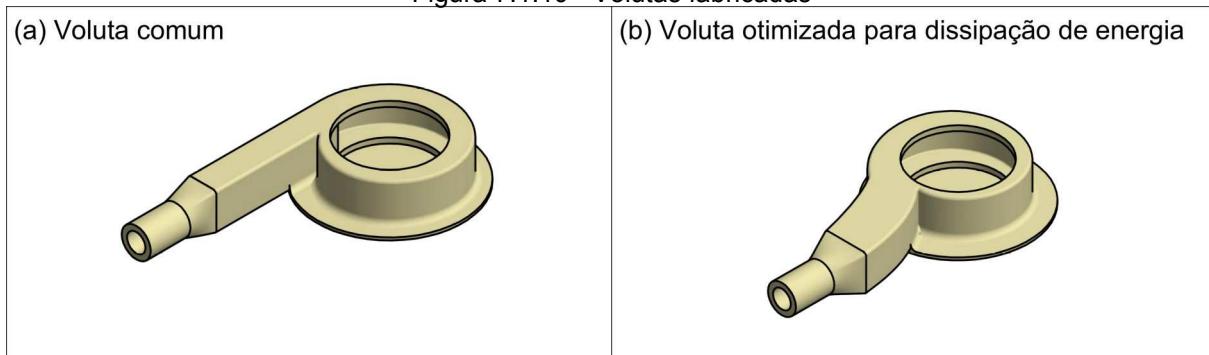
Os modelos de rotores fabricados estão na figura 7.1.9, e os modelos de voluta fabricados estão na figura 7.1.10.

Figura 7.1.9 - Rotores fabricados



Fonte: Própria (3D elaborado no Autodesk® Inventor)

Figura 7.1.10 - Volutas fabricadas



Fonte: Própria (3D elaborado no Autodesk® Inventor)

Entre os discos dos rotores, foram utilizados espaçadores “tipo-aerofólio” (figura 7.1.11), para tentar minimizar a influência dos espaçadores no escoamento e reduzir uma possível tubulência.

Figura 7.1.11 - Disposição do espaçadores “tipo-aerofólio” nos rotores



Fonte: Própria

## 7.2 FABRICAÇÃO DOS PROTÓTIPOS

### 7.2.1 Fabricação da bomba Tesla de CDs

O protótipo de bomba Tesla de CDs foi fabricado por manufatura convencional, por meio de usinagem de acrílico e alumínio. Os espaçadores de 0,55 mm foram fabricados em impressora 3D (usando o material Stratasys® VeroClear). Para os discos da bomba Tesla, foram retiradas as películas dos CDs para deixar apenas o substrato de policarbonato. As chapas de acrílico foram coladas em 3 pares (figura 7.1.1: “tampa”, “voluta” e “verso da voluta”), usando cola para acrílico.

### 7.2.2 Fabricação da mini bomba Tesla

No protótipo otimizado, a voluta, o rotor e o suporte do mancal foram fabricados em impressora 3D (usando o material Stratasys® VeroWhite). A tampa de acrílico, os discos de alumínio, os eixos de latão e os mancais de UHM foram fabricados por manufatura convencional.

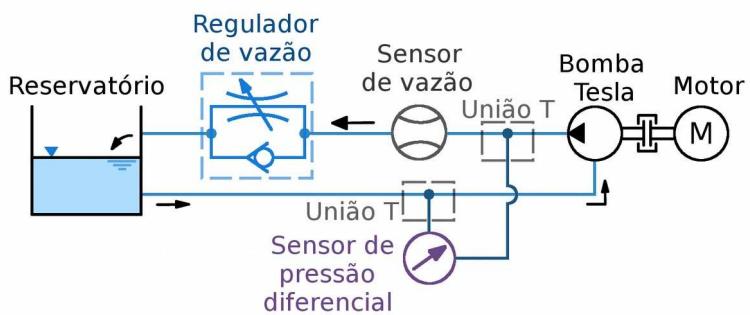
## 7.3 MONTAGENS EXPERIMENTAIS

Para a bomba Tesla de CDs foi feita uma bancada experimental com componentes típicos de circuitos pneumáticos/hidráulicos. Para a bomba Tesla otimizada (“mini bomba Tesla”), foi utilizada a bancada experimental disponível em laboratório na Escola Politécnica da USP.

### 7.3.1 Montagem experimental para a bomba Tesla de CDs

A caracterização experimental do protótipo de bomba Tesla de CDs foi feita quanto a vazão e pressão, por meio da bancada de testes esquematizada na figura 7.3.1.

Figura 7.3.1 - Bancada experimental para a bomba Tesla de CDs



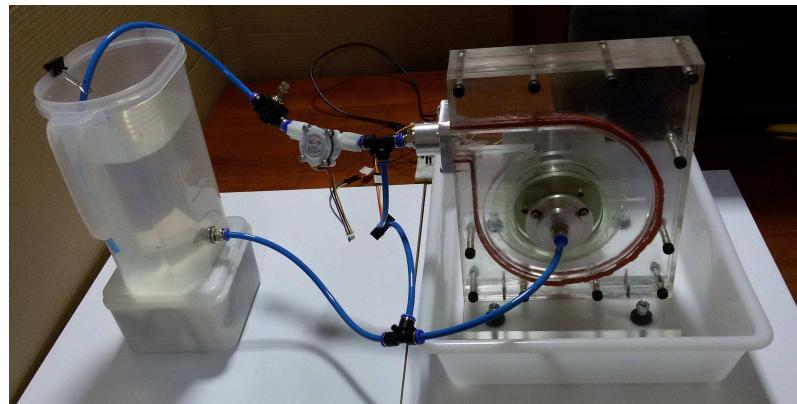
Fonte: Própria

O sensor de vazão é o yf-s402 (sensor de efeito Hall), capaz de medir vazões abaixo de 6 L/min, até por volta de 0,05 L/min, conforme constatado experimentalmente. O sensor de pressão diferencial é o mpx5010dp (sensor piezoresistivo), capaz de medir pressões entre 0 e 10 kPa. O regulador de vazão e as uniões T usados são componentes típicos de circuitos pneumáticos/hidráulicos. A medição de vazão foi tomada como a média de pulsos do sensor de vazão a cada 1 s, enquanto que a medição de pressão foi tomada como a média de medições a cada 1 s.

Antes das medições, os sensores de pressão e de vazão foram calibrados: a calibração do sensor de pressão foi feita por meio de uma coluna de água considerando  $10 \text{ kPa} = 1 \text{ mca}$  (metro de coluna de água); e a calibração do sensor de vazão foi feita por meio da medição de volume bombeado após determinado intervalo de tempo (como 1 minuto).

A bancada experimental montada está na figura 7.3.2. Após encher a bomba Tesla de CDs completamente com água, retira-se o ar que fica nas saídas de medição de pressão.

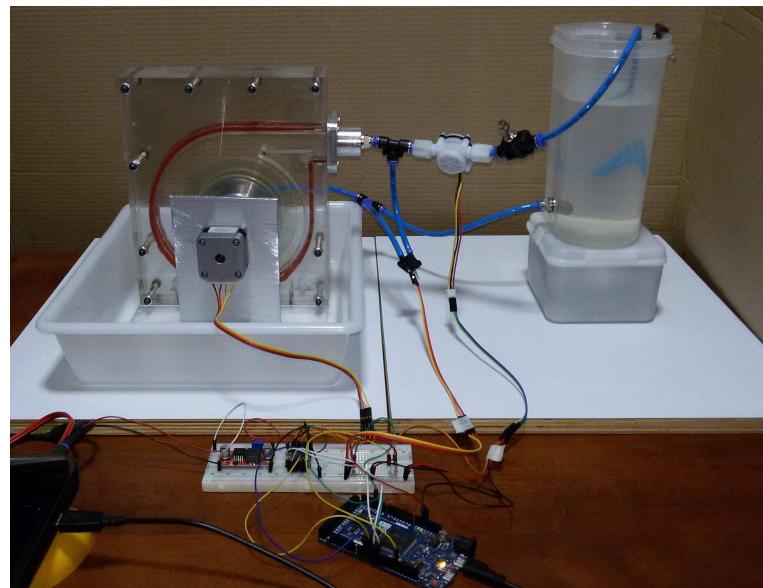
Figura 7.3.2 - Foto mostrando a montagem experimental



Fonte: Própria

O controle e a tomada de medições são feitos por meio de um Arduino Due ligado a um controlador de motor de passo (DRV8825) e aos sensores de pressão e vazão (figura 7.3.3). A fonte é de 32V/15V (de impressora) e utiliza-se o regulador de tensão *step-down* XI6009 (com LM2586S e *trimpot*) para reduzir a tensão para 24V.

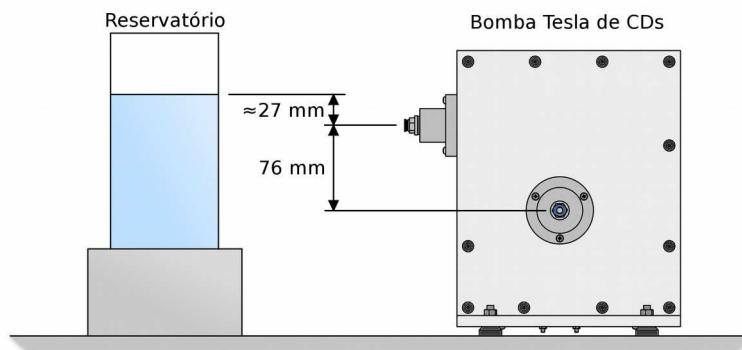
Figura 7.3.3 - Foto mostrando os componentes usados para medição e operação da bancada experimental



Fonte: Própria

As diferenças de altura entre a entrada, a saída e o nível de água do reservatório estão indicadas na figura 7.3.4.

Figura 7.3.4 - Diferenças de altura entre a entrada, a saída e o nível de água do reservatório

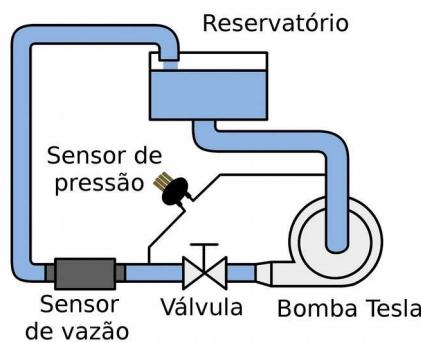


Fonte: Própria

### 7.3.2 Montagem experimental para a mini bomba Tesla

A caracterização experimental do protótipo fabricado foi feita quanto a vazão e pressão, por meio da bancada de testes esquematizada na figura 7.3.5.

Figura 7.3.5 - Bancada experimental para a mini bomba Tesla



Fonte: Própria

O sensor de vazão é o *Flownetix 100series® Smart Ultrasonic Flowmeter* (sensor ultrassônico), e o sensor de pressão diferencial é o mpx5050dp (sensor

piezorresistivo). As leituras de pressão e vazão são feitas por meio de um voltímetro. A rotação do rotor dada pelo motor de corrente contínua foi medida por meio de um sensor óptico na tampa (transparente) do rotor, usando uma faixa pintada com tinta reflexiva na superfície do rotor.

Os componentes fabricados estão na figura 7.3.6, e uma montagem de bomba Tesla está na figura 7.3.7.

Figura 7.3.6 - Componentes fabricados para a mini bomba Tesla



Fonte: Própria

Figura 7.3.7 - Bomba Tesla montada



Fonte: Própria

## 8 RESULTADOS

Os resultados foram divididos em duas partes principais: resultados numéricos e resultados experimentais. Os resultados numéricos incluem a validação do modelo computacional, análise paramétrica, simulações e otimizações. Os resultados experimentais incluem os experimentos com a bomba Tesla de CDs (projetada por análise paramétrica) e com a mini bomba Tesla (projetada por otimização topológica).

### 8.1 VALIDAÇÃO DO MODELO COMPUTACIONAL

Para validar o modelo de simulação implementado no FEniCS, foram comparados os resultados obtidos no FEniCS com resultados obtidos no ANSYS® CFX. Assim, foram realizadas análises de discretização da malha para verificar a convergência dos resultados. Os parâmetros gerais para as simulações estão resumidos na tabela 8.1.1.

Tabela 8.1.1 - Parâmetros de simulação no ANSYS® CFX e no FEniCS

		Parâmetros de simulação
Tipo de simulação		Regime permanente
Equações constitutivas	Continuidade	Sim
	Quantidade de movimento linear	Sim
	Energia	Não
Modelo de escoamento		Laminar
Fluido		Água (25°C) ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , $\mu = 0,001 \text{ Pa.s}$ )
Atuação da força da gravidade		Não
Referencial		Relativo

Os critérios de convergência utilizados foram baseados em resíduos:

- No FEniCS, utilizaram-se os valores padrão do DOLFIN para convergência: tolerância absoluta (“*absolute tolerance*”) de  $10^{-10}$ , e tolerância relativa (“*relative tolerance*”) de  $10^{-9}$ . Nos casos dos modelos de 2 discos com canal de entrada e de

5 discos, foi utilizado um escalamento das equações para tentar melhorar a precisão dos cálculos das matrizes do Método de Elementos Finitos, convertendo-as para o sistema MMGS (Milímetros-Gramas-Segundos) somente para resolver as equações da forma fraca.

- No ANSYS, utilizou-se a configuração padrão: resíduo do tipo RMS (“*Root Mean Square*”, “raiz do valor quadrático médio”, “valor eficaz”) (Solver Control > Convergence Criteria > Residual Type: RMS) e tolerância residual de  $10^{-4}$  (Solver Control > Convergence Criteria > Residual Target: 1,E-4).

### 8.1.1 Modelos para simulação

Foram elaborados três modelos para as simulações de teste, indicados na tabela 8.1.2. A escolha das dimensões dos discos nas simulações foi baseada em Medvitz et al. (2011). O modelo de 2 discos é o mais simples, composto de 2 discos rotativos e uma velocidade radial de entrada. O modelo de 2 discos com canal de entrada possui uma velocidade parabólica axial de entrada, sendo que os discos possuem espessura igual a de CDs (1,2 mm). O terceiro modelo é baseado no modelo utilizado por Medvitz et al. (2011), tendo sido simplificado para ser aplicado a uma malha 2D.

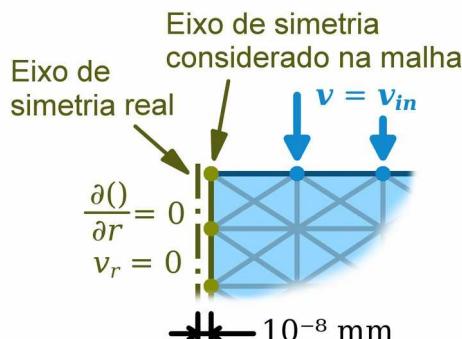
Tabela 8.1.2 - Modelos utilizados para simulação

Modelo de 2 discos			
Parâmetros de entrada			
Rotação	1000 rpm	Vazão de entrada	0,622 L/min
Pressão na saída	0 Pa *	Perfil de velocidade de entrada	Constante (1 m/s)
Dimensões			
$r_{int}$	3,3 mm	$e$	0,5 mm
$r_{ext}$	10,2 mm		
Modelo de 2 discos com canal de entrada			
Parâmetros de entrada			
Rotação	1000 rpm	Vazão de entrada	0,311 L/min
Pressão na saída	0 Pa *	Perfil de velocidade de entrada	Parabólico
Dimensões			
$r_{int}$	3,3 mm	$h_{\text{entrada}}$	2,4 mm
$r_{ext}$	10,2 mm	$e_{\text{disco}}$ (espessura de CD)	1,2 mm
$e$	0,50 mm		
Modelo de 5 discos			
Parâmetros de entrada			
Rotação	50 rpm	Vazão de entrada	0,001 L/min
Pressão na saída	0 Pa *	Perfil de velocidade de entrada	Parabólico
Dimensões			
$r_{int}$	3,3 mm	$h_2$	4,5 mm
$r_{ext}$	10,2 mm	$h_3$	6,0 mm
$e$	0,5 mm	$r_a$	1,65 mm
$e_{\text{disco}}$	0,25 mm	$r_b$	11,40 mm
Número de discos	5	$a_1$	0,5 mm
$h_1$	0,618 mm	$h_p$	2,75 mm

\* Aberto para a atmosfera usando  $p = 0$  como referência de pressão.

No FEniCS, para implementar a condição de contorno de eixo de simetria (no segundo e terceiro modelos da tabela 8.1.2), assumiu-se que ela funcionasse como uma parede estática. Para evitar o problema de descontinuidade das equações de Navier-Stokes que surge devido ao uso de coordenadas cilíndricas (termo de aceleração centrípeta, que possui uma divisão pela coordenada radial), assumiu-se que o eixo de simetria na malha estaria defasado de um raio muito pequeno ( $10^{-8}$  mm) com relação ao eixo de simetria real (ver a figura 8.1.1).

Figura 8.1.1 - Condicionamento de contorno implementado para eixo de simetria



Fonte: Própria

A condição de contorno no eixo de simetria (“*axis boundary condition*”) é dada por duas condições:

$$1) \text{ Velocidade radial nula: } v_r = 0 \quad (8.1.1)$$

$$2) \text{ Gradientes radiais nulos para qualquer variável: } \frac{\partial( )}{\partial r} = 0 \quad (8.1.2)$$

A condição de velocidade radial nula garante que não há saída (sorvedouro) e nem entrada (fonte) de fluido no eixo de simetria, enquanto que a condição de gradientes radiais nulos define a simetria propriamente dita.

### 8.1.2 Análise de convergência no FEniCS

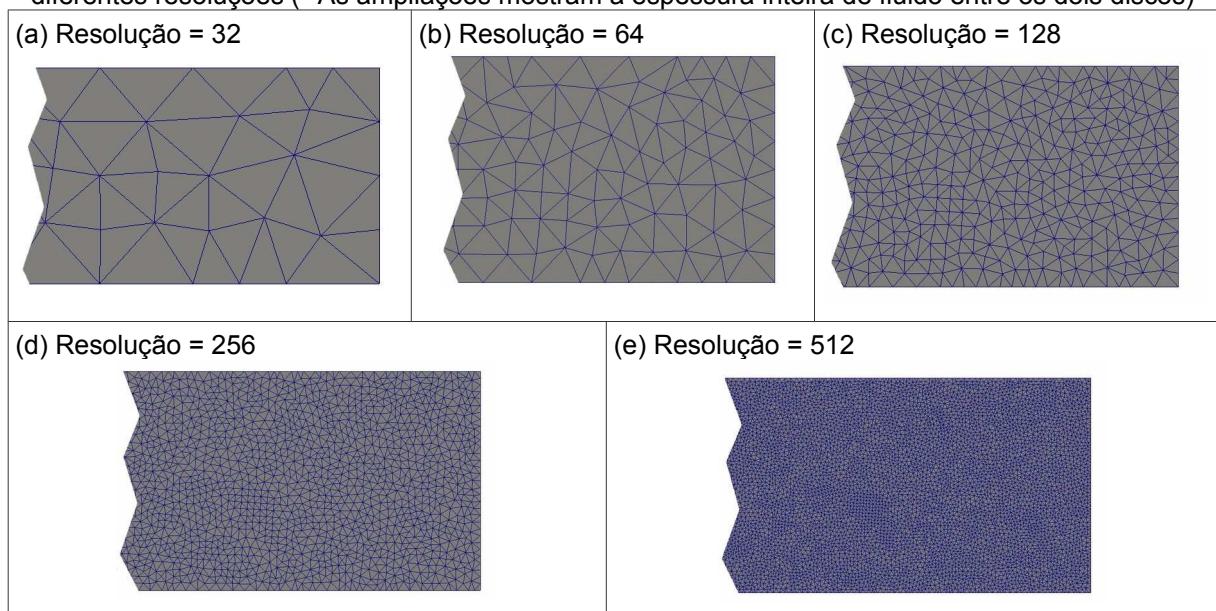
Para as simulações no FEniCS, foram utilizadas malhas não-estruturadas (i.e., com os triângulos não-ordenados) para cada um dos modelos (apesar do

modelo de 2 discos admitir facilmente uma malha estruturada devido à sua geometria simples).

### Modelo de 2 discos

Para análise de convergência no FEniCS em função da discretização, foram utilizadas as resoluções de malha 32, 64, 128, 256 e 512 (ver a figura 8.1.2). Segundo Langtangen e Logg (2016, p. 32), no FEniCS, o tamanho da célula (i.e., do elemento finito) é aproximadamente igual ao diâmetro do domínio dividido pela resolução.

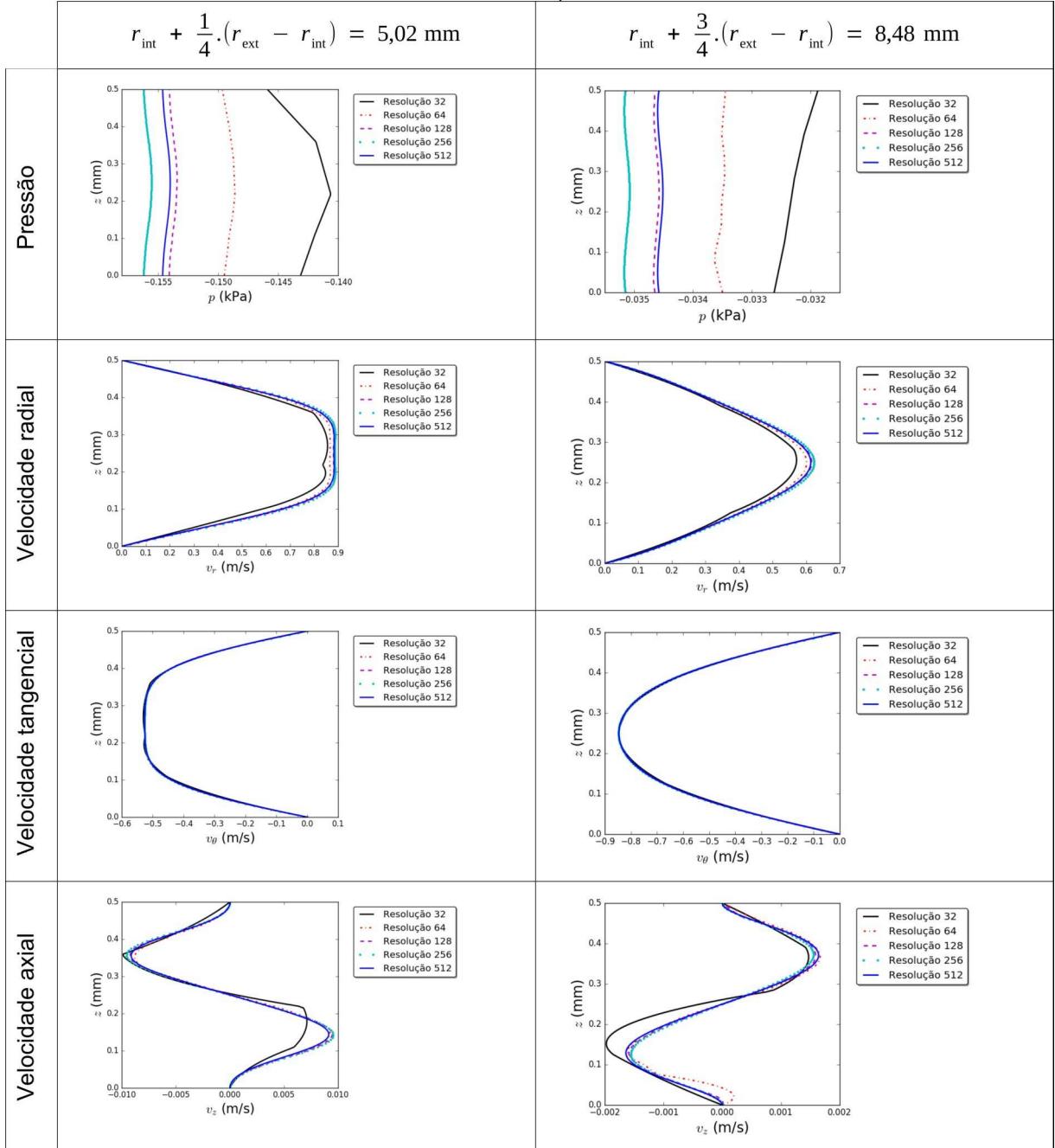
Figura 8.1.2 - Ampliação das extremidades direitas das malhas do modelo de 2 discos, para diferentes resoluções (\* As ampliações mostram a espessura inteira de fluido entre os dois discos)



Fonte: Própria (imagens elaboradas com o ParaView e editadas no software GIMP)

Para comparar o efeito das diferentes discretizações na pressão e nas velocidades radial, tangencial e axial, plotaram-se essas variáveis no 1/4 inicial da malha e no 1/4 final da malha (figura 8.1.3). Pode-se observar que a simulação está convergindo para valores maiores de resolução. Com a resolução de 256 já se conseguem valores com precisão relativamente boa. Cabe lembrar que a velocidade tangencial plotada é uma velocidade relativa e não absoluta.

Figura 8.1.3 - Comparação de perfis de pressão e velocidade em  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{3}{4}$  da dimensão radial do domínio para o modelo de 2 discos (\*  $r_{\text{int}}$  é o raio interno dos discos, e  $r_{\text{ext}}$  é o raio externo dos discos)

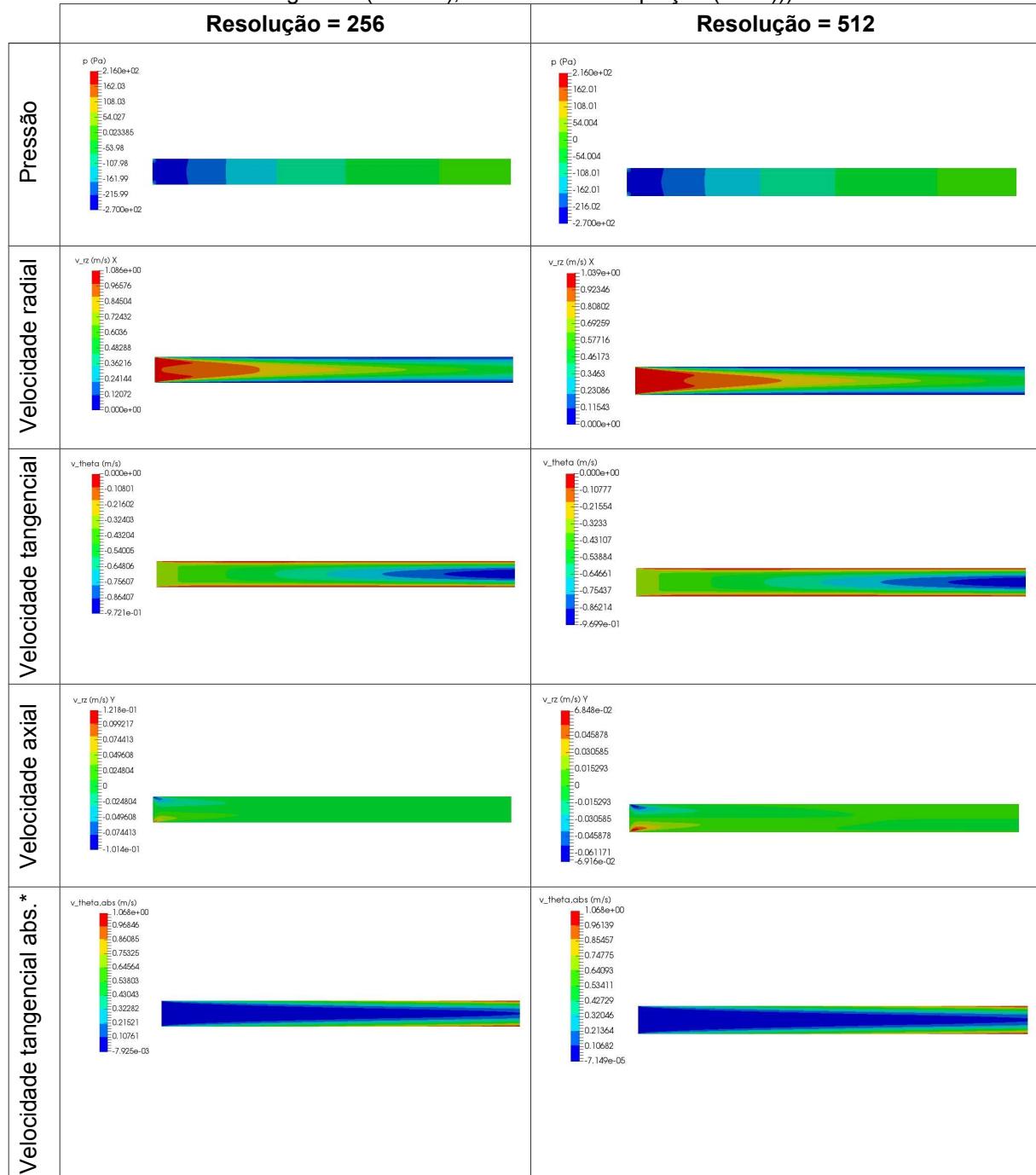


Fonte: Própria (gráficos elaborados com a biblioteca Matplotlib de Python)

Para comparar as distribuições de pressão e velocidades para as resoluções 256 e 512, elaborou-se a figura 8.1.4. Somente para o gráfico de pressão alteraram-se os extremos da escala de cores da resolução 512 para a escala de cores da resolução 256, porque os picos de pressão notados nos dois cantos iniciais do

domínio (devidos às descontinuidades provocada por cantos no Método de Elementos Finitos) ficaram com magnitudes muito díspares. Pode-se notar que os gráficos de contorno estão, no geral, muito coerentes. A diferença na distância de junção das camadas limite nos gráficos de velocidade radial se deve às diferentes escalas de cores adotadas para cada caso, estando muito próximas se alterar a escala de cores de um deles para a do outro.

Figura 8.1.4 - Comparação de pressão e velocidade para as resoluções de 256 e 512 no modelo de 2 discos (\* Velocidade tangencial abs. (absoluta): convertida a partir da velocidade tangencial (relativa), utilizando-se a equação (4.1.6)))

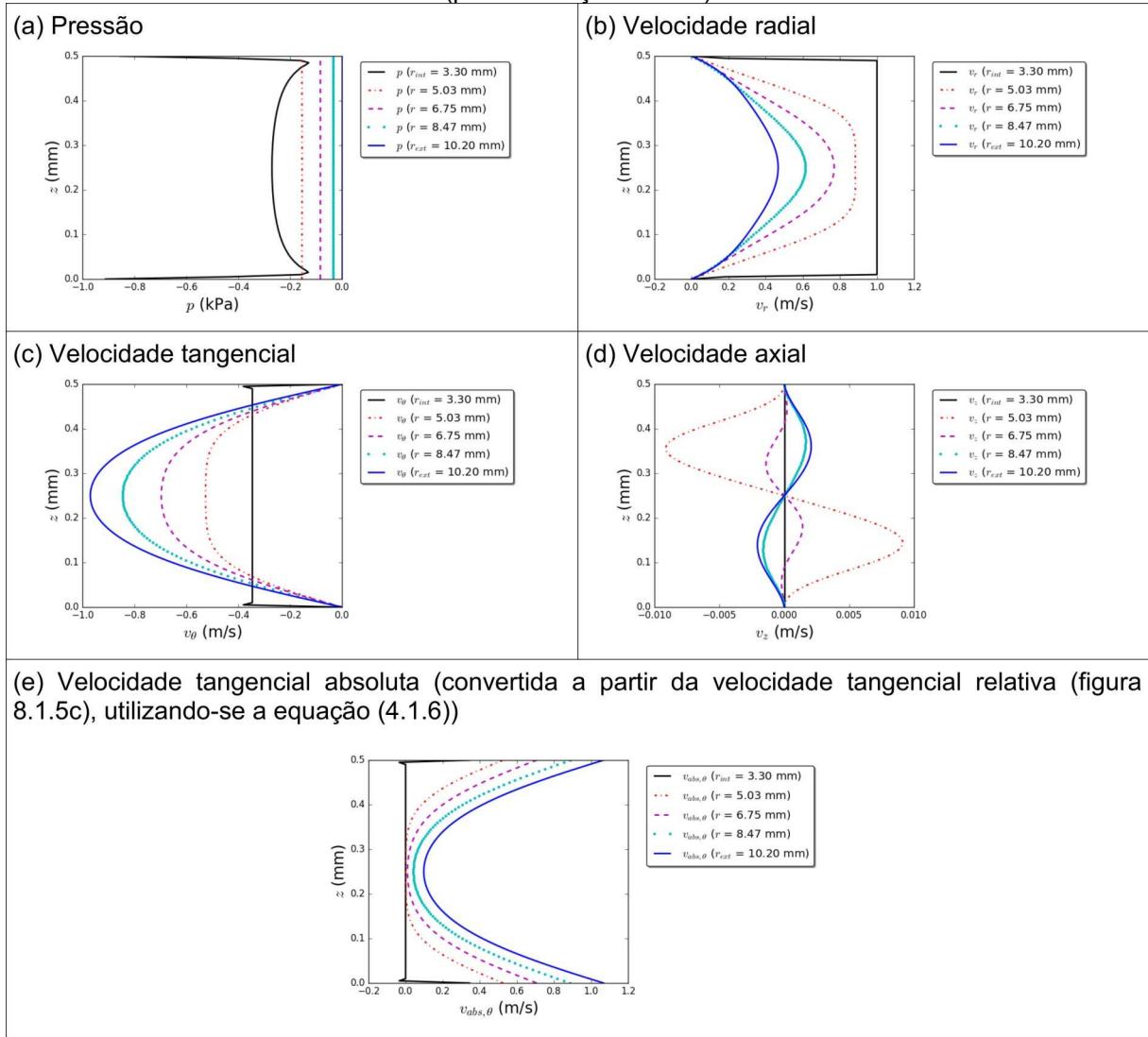


Fonte: Própria (imagens elaboradas com o ParaView)

Para verificar a progressão dos perfis de pressão e de velocidade ao longo do espaçamento entre os discos, elaboraram-se gráficos para diferentes distâncias

radiais (figura 8.1.5). Os picos de pressão/velocidade no raio interno ( $r_{int}$ ) se devem às descontinuidades (cantos) do Método de Elementos Finitos e, portanto, não têm significado físico.

Figura 8.1.5 - Progressão dos perfis de pressão e de velocidade em diferentes distâncias radiais (para resolução de 512)



Fonte: Própria (gráficos elaborados com a biblioteca Matplotlib de Python)

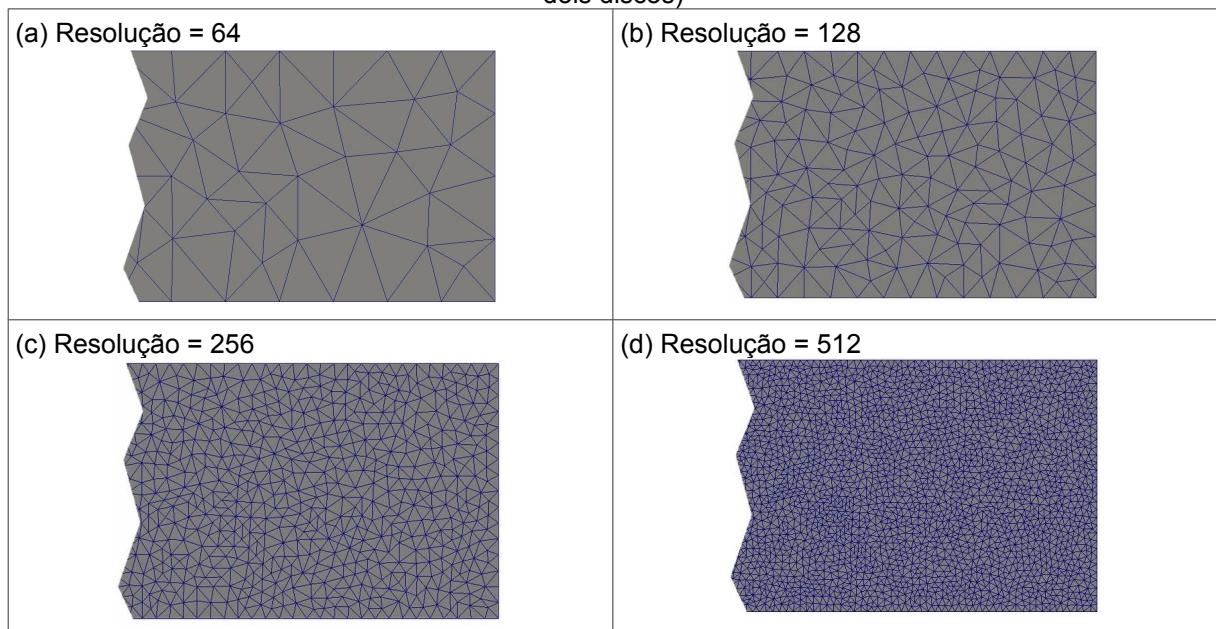
A partir dos gráficos acima, pode-se perceber que a pressão (figura 8.1.5a), inicialmente negativa, vai subindo até chegar em 0 kPa, o que indica que a bomba Tesla está conseguindo bombear fluido na vazão especificada. Os perfis de velocidade radial (figura 8.1.5b), juntamente com o gráfico de contorno correspondente da figura 8.1.3, mostram que a velocidade vai diminuindo à medida

que o fluido percorre os discos. A velocidade tangencial (figura 8.1.5c) inicia com o valor de  $-\omega \cdot r_{\text{int}}$  e cresce no meio do gráfico, indicando que os discos estão “puxando” o fluido pelo efeito da camada limite. Esse efeito pode ser observado mais facilmente na figura 8.1.5e, em que a velocidade tangencial relativa foi convertida para o referencial absoluto. A velocidade axial (figura 8.1.5d) possui valores entre -0,010 m/s e +0,010 m/s, o que mostra que ela não é significativa nesse caso.

### **Modelo de 2 discos com canal de entrada**

Para análise de convergência no FEniCS em função da discretização, foram utilizadas as resoluções de malha 64, 128, 256, 512 (ver a figura 8.1.6).

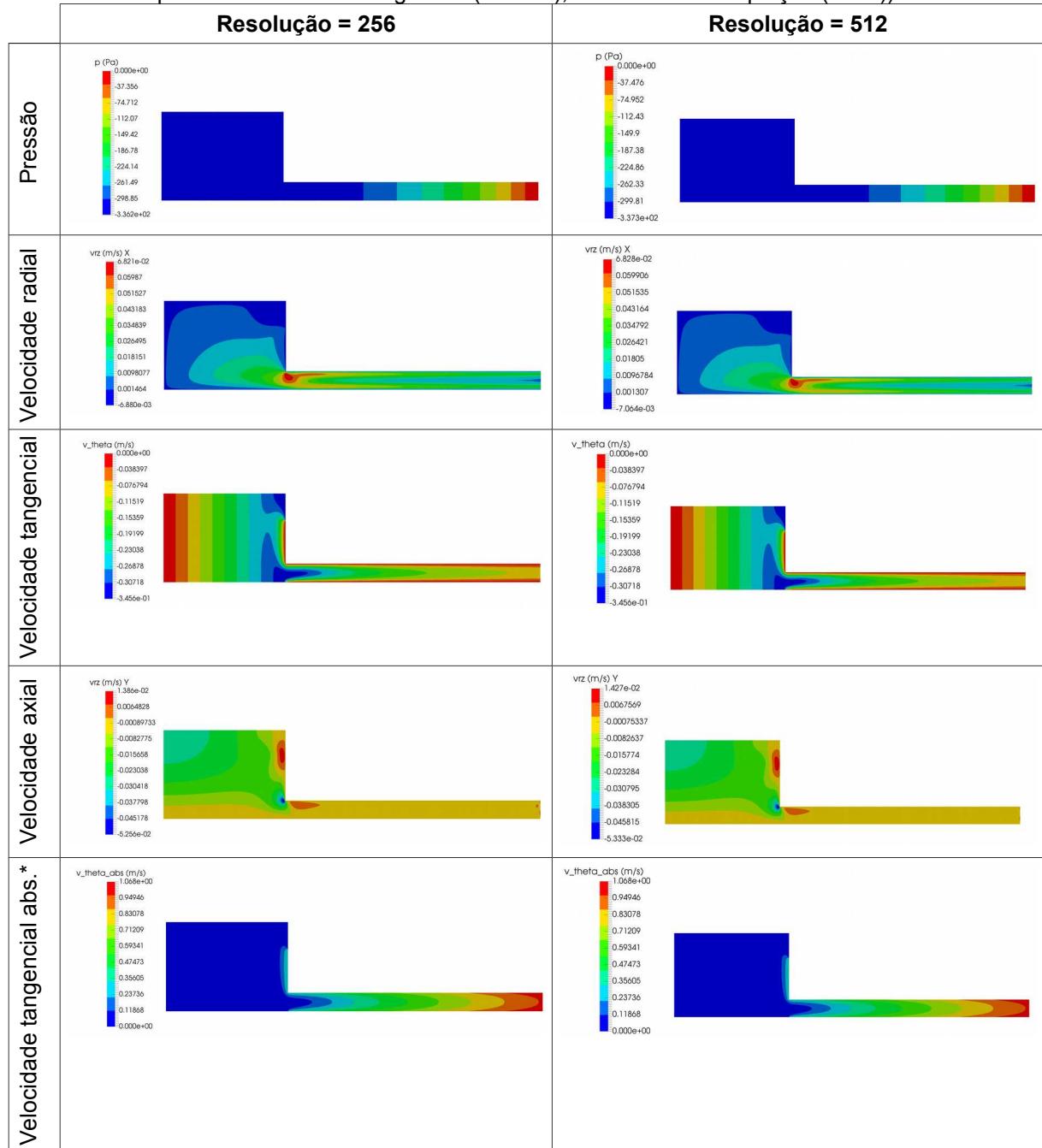
Figura 8.1.6 - Ampliação das extremidades direitas das malhas do modelo de 2 discos com canal de entrada, para diferentes resoluções (\* As ampliações mostram a espessura inteira de fluido entre os dois discos)



Fonte: Própria (imagens elaboradas com o ParaView e editadas no software GIMP)

Na figura 8.1.7, foram reproduzidas as distribuições de pressão e velocidades para as resoluções 256 e 512. Como se pode observar, a resolução de 256 parece possuir precisão razoavelmente boa.

Figura 8.1.7 - Comparação de pressão e velocidade para as resoluções de 256 e 512 no modelo de 2 discos com canal de entrada (\* Velocidade tangencial abs. (absoluta): convertida a partir da velocidade tangencial (relativa), utilizando-se a equação (4.1.6))

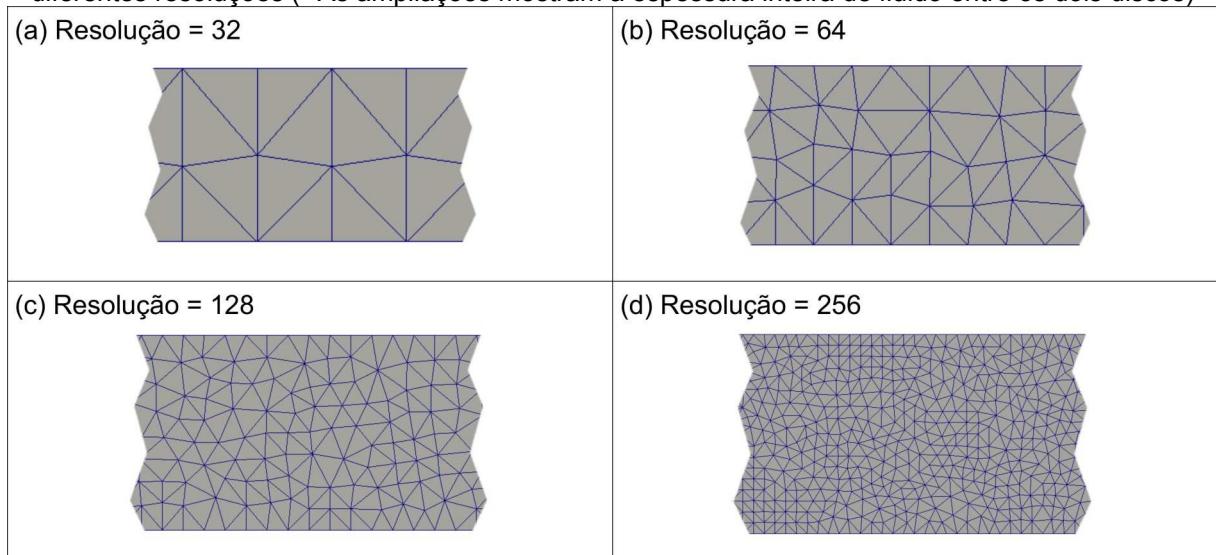


Fonte: Própria (imagens elaboradas com o ParaView)

### Modelo de 5 discos

O modelo de 5 discos é uma versão simplificada do modelo utilizado por Medvitz et al. (2011), de 5 discos. Para análise de convergência no FEniCS em função da discretização, foram utilizadas as resoluções de malha 32, 64, 128 e 256 (ver a figura 8.1.8).

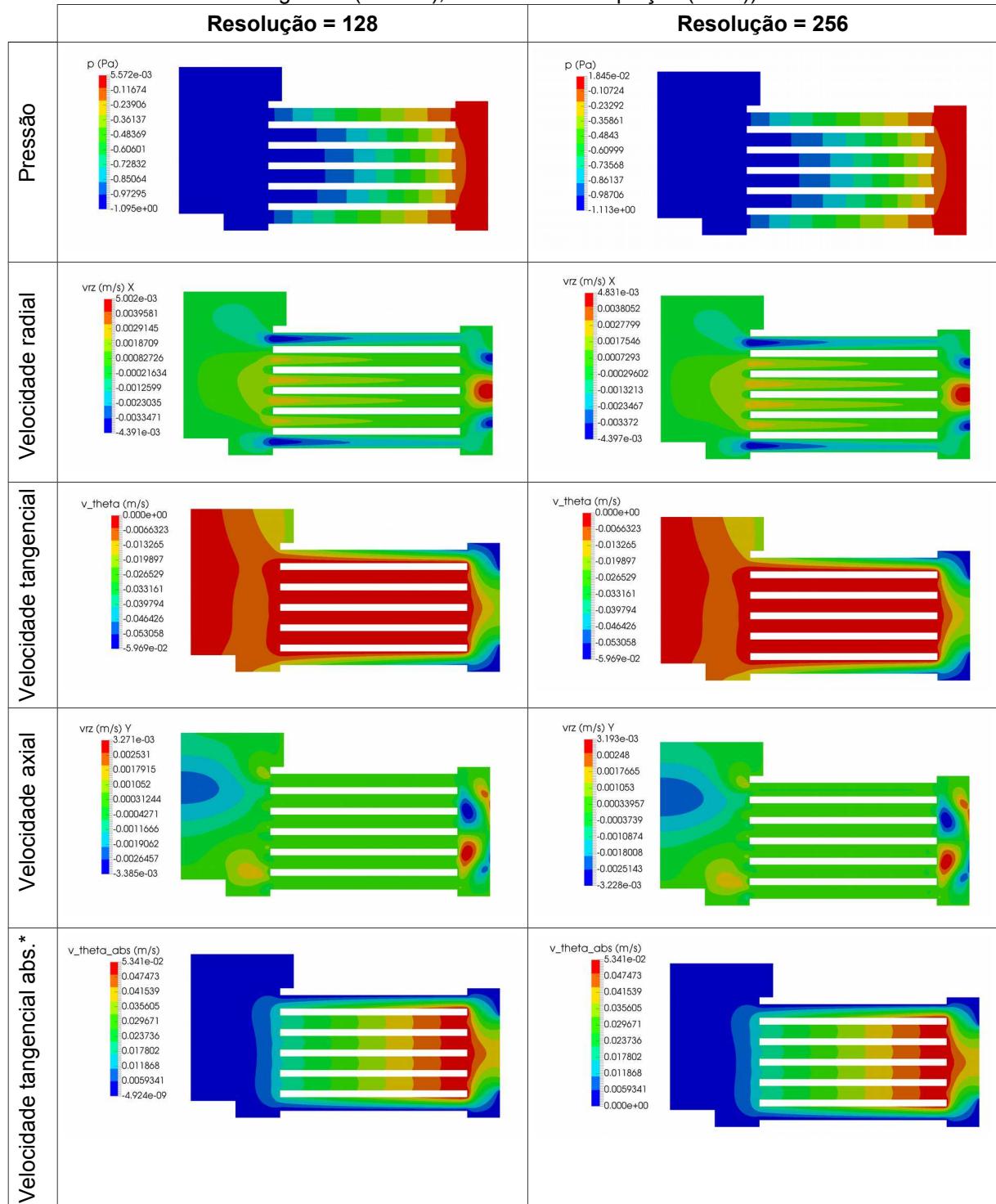
Figura 8.1.8 - Ampliação das extremidades direitas das malhas do modelo de 5 discos, para diferentes resoluções (\* As ampliações mostram a espessura inteira de fluido entre os dois discos)



Fonte: Própria (imagens elaboradas com o ParaView e editadas no software GIMP)

Na figura 8.1.9, foram reproduzidas as distribuições de pressão e velocidades para as resoluções 128 e 256.

Figura 8.1.9 - Comparação de pressão e velocidade para as resoluções de 128 e 256 no modelo de 5 discos (\* Velocidade tangencial abs. (absoluta): convertida a partir da velocidade tangencial (relativa), utilizando-se a equação (4.1.6))



Fonte: Própria (imagens elaboradas com o ParaView)

Pode-se perceber algumas diferenças de valores entre os gráficos de contorno da figura 8.1.9, mas percebe-se que eles não são muito díspares, especialmente para pressão e velocidade radial.

A escolha de vazão e rotação muito baixas (0,001L/min e 50 rpm) para essa simulação (tabela 8.1.2) se deve ao pequeno tamanho dos discos (raio interno de 3,3 mm e raio externo de 10,2 mm) e também ao fato de estarem sendo utilizadas as propriedades reais da água nas simulações. A viscosidade cinemática da água é de  $10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s, o que significa um fator de  $10^6$  vezes no número de Reynolds. Assim, uma pequena vazão é capaz de elevar consideravelmente o número de Reynolds, o que, devido ao aumento da não-linearidade das equações, pode levar o método numérico no FEniCS a instabilidade e não-convergência (\* Como o ANSYS® CFX possui métodos de estabilização implementados, ele conseguiria simular com números de Reynolds mais elevados mesmo usando um modelo de escoamento laminar). Plotou-se a distribuição do **número de Reynolds local com relação ao raio externo dos discos** (tabela 4.4.1) na figura 8.1.10. Pode-se observar que o número de Reynolds chegou a valores tão altos quanto 544,8.

Figura 8.1.10 - Número de Reynolds local com relação ao raio externo dos discos (para malha de resolução 256)



Fonte: Própria (figura elaborada com o ParaView)

### 8.1.2 Análise de convergência no ANSYS® CFX

Nas simulações, foi utilizado o ANSYS® CFX do pacote ANSYS® 18 Student. Os parâmetros principais do tamanho do elemento de malha foram reproduzidos na tabela 8.1.3.

Tabela 8.1.3 - Parâmetros principais do tamanho dos elementos da malha gerada no ANSYS® CFX  
(\* Todos os demais parâmetros foram deixados com os seus valores *default*)

Sizing	
Parâmetro	Valor
Size Function	Curvature
Relevance Center	Fine
Initial Seed Size	Active Assembly
Transition	Slow
Span Angle Center	Fine
Curvature Normal Angle	5,0 °
Min Size	Default (1,01e-006 m)
Max Face Size	<b>[Parâmetro a ser variado]</b>
Max Tet Size	Default (2,0201e-004 m)
Growth Rate	Default (1,20 )
Automatic Mesh Based on Defeaturing	On
Defeature Size	Default (5,0502e-007 m)

O parâmetro utilizado para variar o tamanho dos elementos da malha foi “*Max Face Size*” (tabela 8.1.3) (máximo tamanho de face do elemento). Os valores utilizados para esse parâmetro estão na tabela 8.1.4, juntamente com estatísticas das malhas criadas (número de nós e número de elementos).

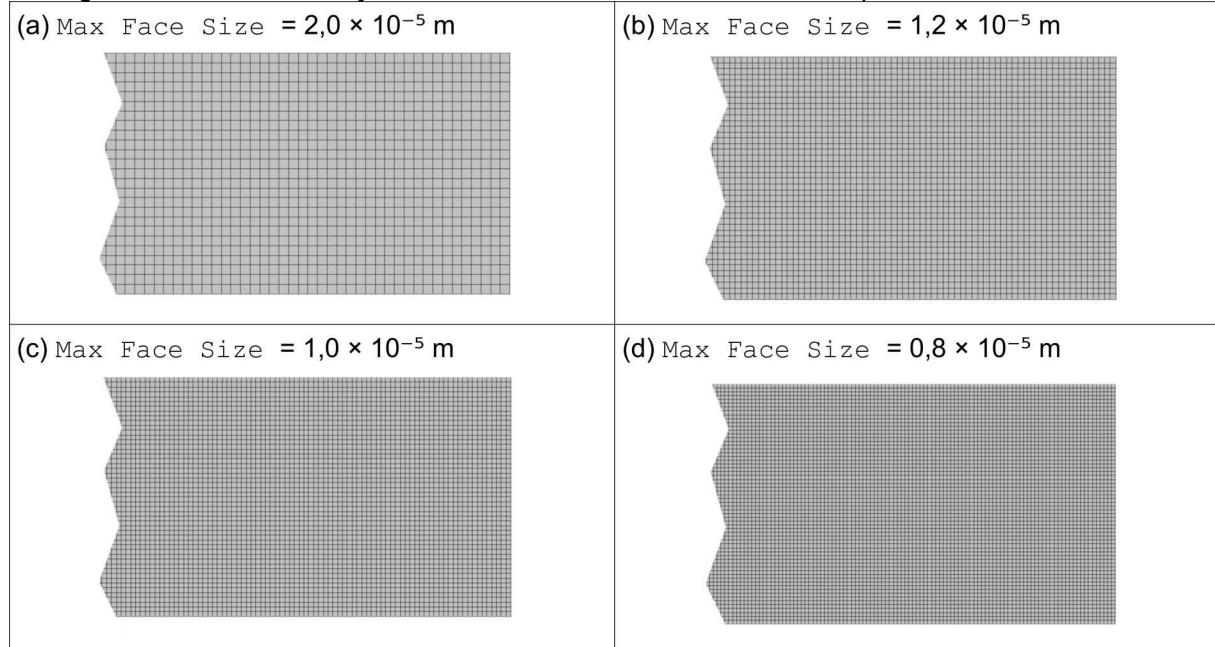
Tabela 8.1.4 - Parâmetro utilizado para variar o tamanho dos elementos da malha gerada no ANSYS® CFX e estatísticas da malha (número de nós e número de elementos) correspondentes

Modelo	Máximo tamanho de face do elemento (Sizing > Max Face Size)	Número de nós (Statistics > Nodes)	Número de elementos (Statistics > Elements)
Modelo de 2 discos	$2,0 \times 10^{-5}$ m	35.984	25.875
	$1,2 \times 10^{-5}$ m	123.840	96.600
	$1,0 \times 10^{-5}$ m	246.687	207.000
	$0,8 \times 10^{-5}$ m	442.368	380.583
Modelo de 2 discos com canal de entrada	$5,0 \times 10^{-5}$ m	11.125	34.901
	$4,5 \times 10^{-5}$ m	13.993	44.317
	$4,0 \times 10^{-5}$ m	17.982	59.070
	$3,5 \times 10^{-5}$ m	24.277	82.156
Modelo de 5 discos	$5,0 \times 10^{-5}$ m	50.819	173.558
	$4,0 \times 10^{-5}$ m	84.310	308.346
	$3,0 \times 10^{-5}$ m	176.365	697.742

### **Modelo de 2 discos**

As discretizações utilizadas na malha do ANSYS® CFX estão reproduzidas na figura 8.1.11.

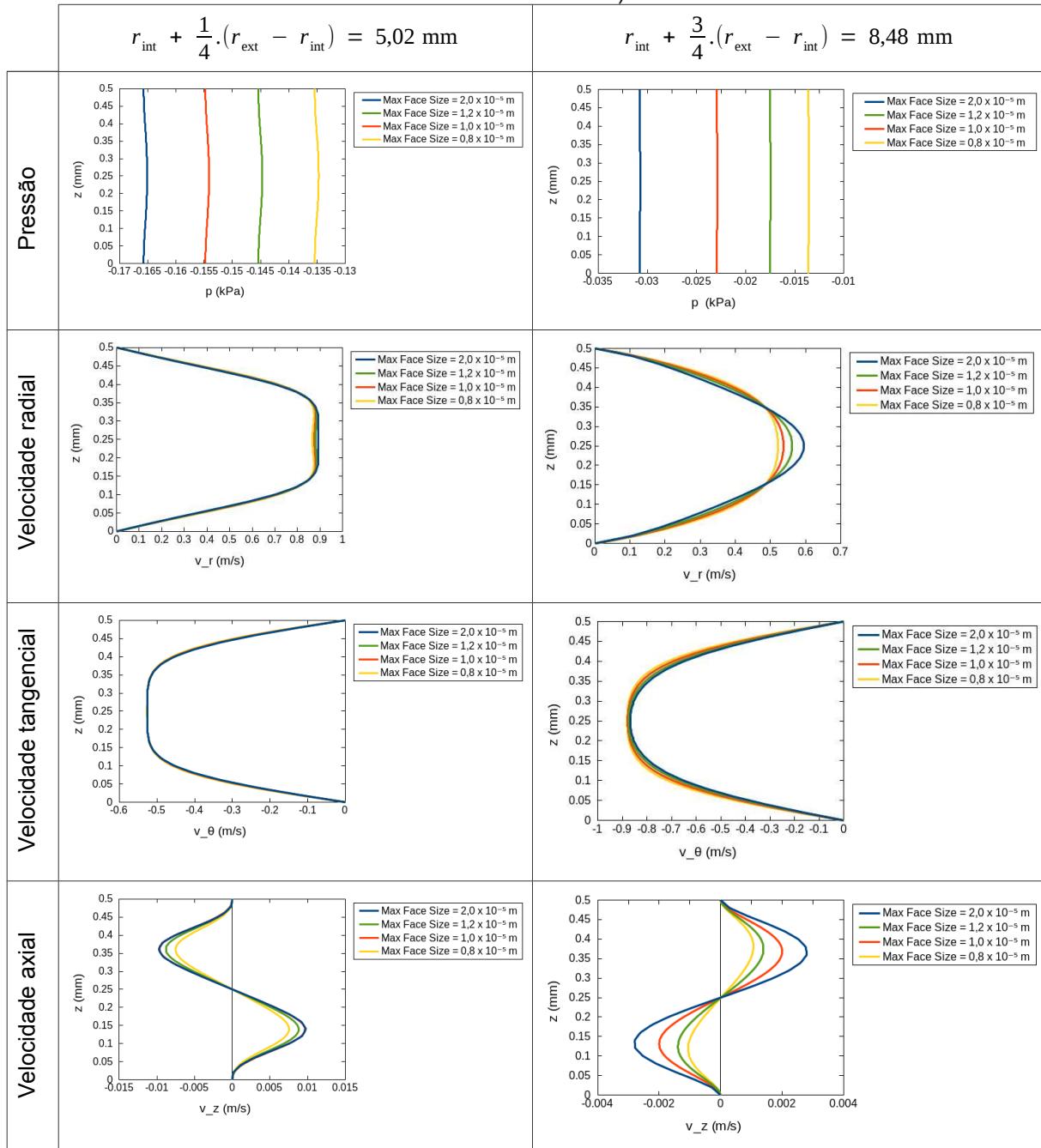
Figura 8.1.11 - Discretizações de malha utilizadas no ANSYS® CFX para o modelo de 2 discos



Fonte: Própria (imagens elaboradas com o ANSYS® CFX e editadas no software GIMP)

Para comparar o efeito das diferentes discretizações na pressão e nas velocidades radial, tangencial e axial, plotaram-se essas variáveis no  $\frac{1}{4}$  inicial da malha e no  $\frac{1}{4}$  final da malha (figura 8.1.12). Pode-se observar que a convergência é boa para as velocidades radial e tangencial, mas não é muito boa com relação à pressão.

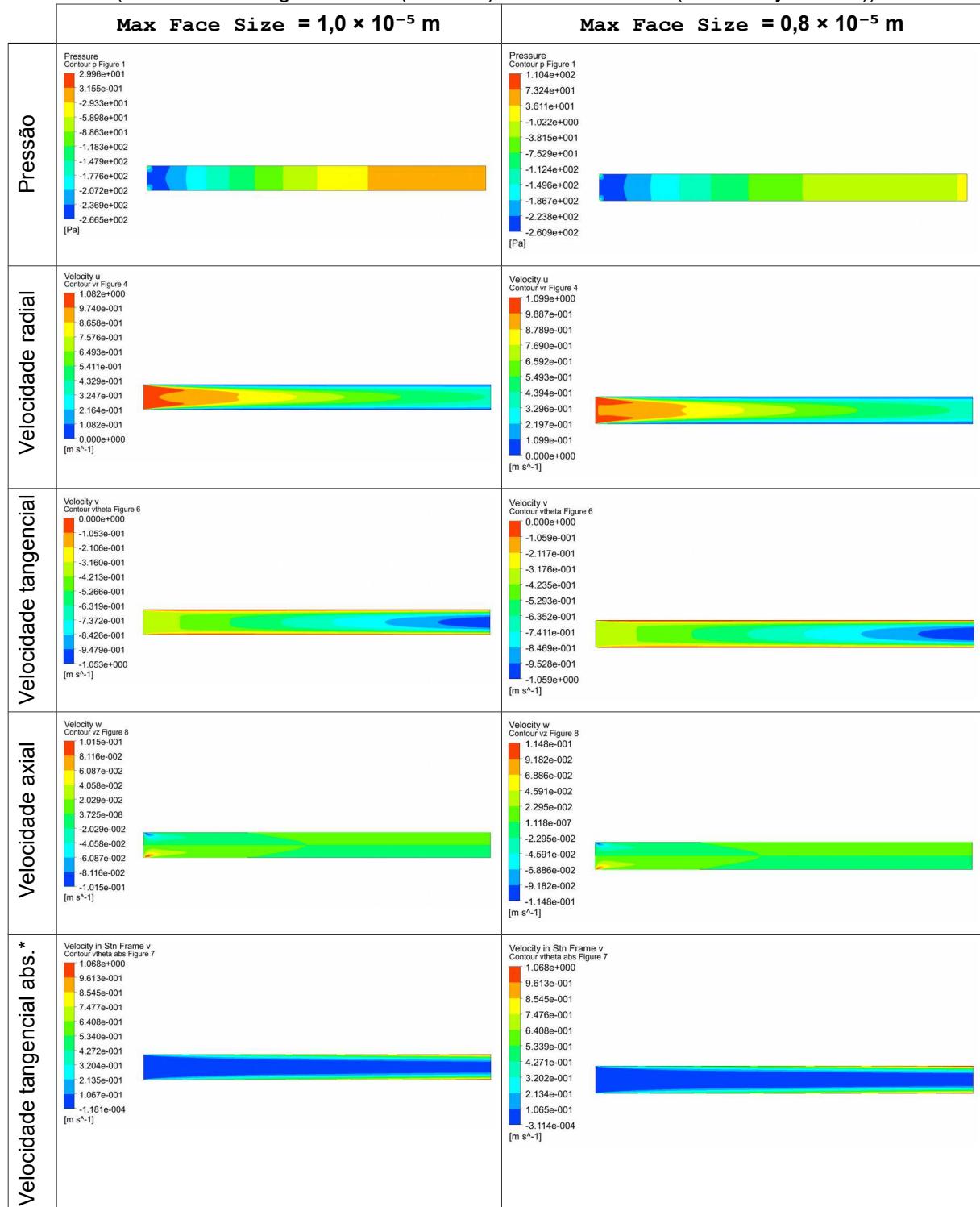
Figura 8.1.12 - Comparação de perfis de pressão e velocidade em  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{3}{4}$  da dimensão radial do domínio para o modelo de 2 discos no ANSYS® CFX (\*  $r_{\text{int}}$  é o raio interno dos discos, e  $r_{\text{ext}}$  é o raio externo dos discos)



Fonte: Própria (gráficos elaborados com LibreOffice Calc a partir dos dados gerados pelo ANSYS® CFX)

Para comparar as distribuições de pressão e velocidades para os tamanhos  $\text{Max Face Size} = 1,0 \times 10^{-5} \text{ m}$  e  $\text{Max Face Size} = 0,8 \times 10^{-5} \text{ m}$ , elaborou-se a figura 8.1.13.

Figura 8.1.13 - Comparação de pressão e velocidade para os tamanhos de  $1,0 \times 10^{-5}$  m e  $0,8 \times 10^{-5}$  m no modelo de 2 discos no ANSYS® CFX  
(\* Velocidade tangencial abs. (absoluta): No Stn. Frame ("Stationary Frame"))

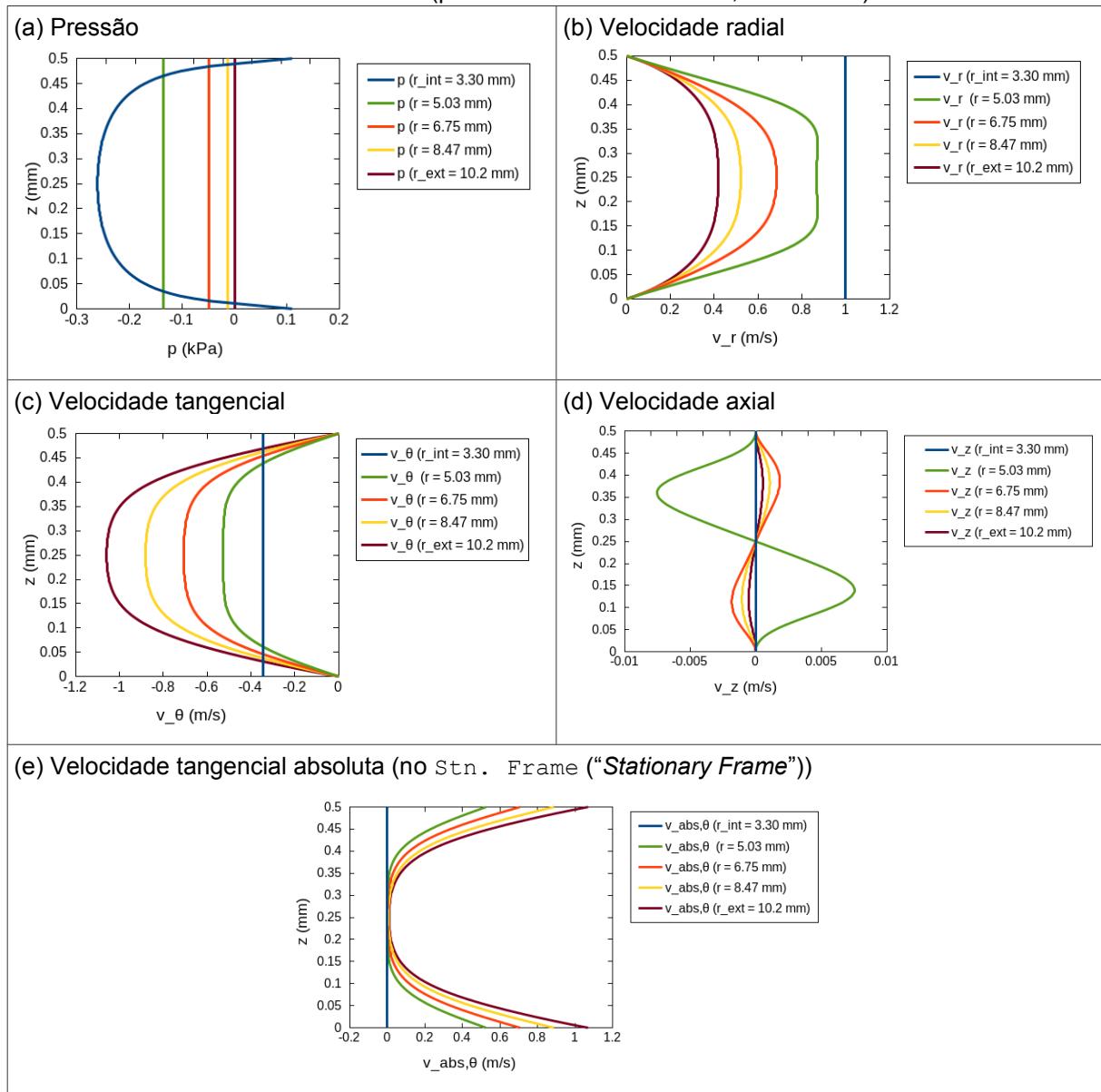


Fonte: Própria (imagens elaboradas utilizando-se o software ParaView)

Na figura 8.1.13, nota-se certa diferença nos gráficos de velocidade radial, porém ela se deve basicamente às diferentes escalas de cores utilizadas para cada gráfico, indicando que os perfis de velocidade são bem próximos.

Para verificar a progressão dos perfis de pressão e de velocidade ao longo do espaçamento entre os discos, elaboraram-se gráficos para diferentes distâncias radiais (figura 8.1.14).

Figura 8.1.14 - Progressão dos perfis de pressão e de velocidade em diferentes distâncias radiais no ANSYS® CFX (para  $\text{Max Face Size} = 0,8 \times 10^{-5} \text{ m}$ )

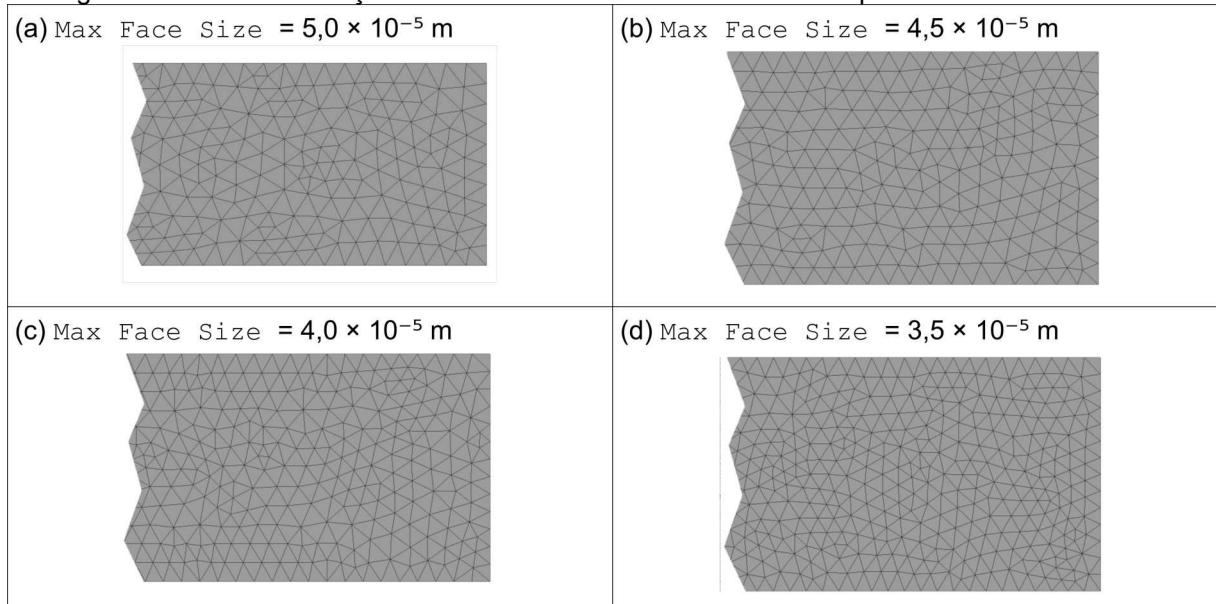


Fonte: Própria (gráficos elaborados no ANSYS® CFX)

### Modelo de 2 discos com canal de entrada

As discretizações utilizadas na malha do ANSYS® CFX estão reproduzidas na figura 8.1.15. Para discretizações maiores ( $\text{Max Face Size} \leq 3 \times 10^{-5} \text{ m}$ ), os resultados das simulações passaram a apresentar instabilidade em ponto perto do canto superior esquerdo do domínio, gerando pico localizado nos gráficos de pressão e velocidade radial. Cabe notar que os elementos utilizados pelo ANSYS® CFX neste caso são tetraédricos/triangulares, ao contrário do caso do modelo de 2 discos (elementos cúbicos/quadrados). Essa escolha se deveu ao fato do modelo em forma de cunha modelado no ANSYS® CFX começar do centro do eixo de rotação (ao contrário do outro caso, em que o modelo se estendia do raio interno ao raio externo dos discos), formando uma extremidade muito fina no domínio, que é melhor modelada por tetraedros/triângulos.

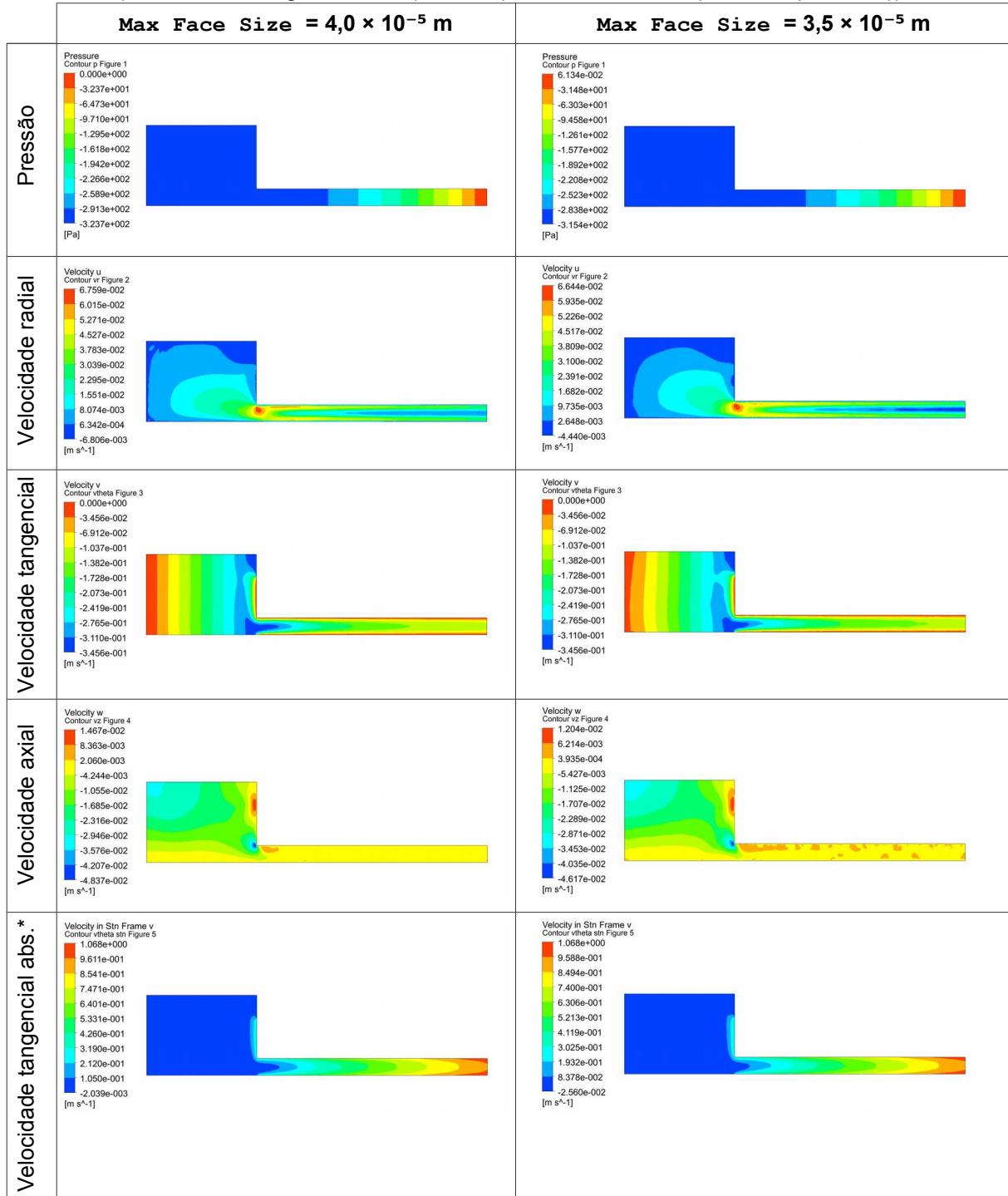
Figura 8.1.15 - Discretizações de malha utilizadas no ANSYS® CFX para o modelo de 2 discos



Fonte: Própria (imagens elaboradas com o ANSYS® CFX e editadas no software GIMP)

Na figura 8.1.16, foram reproduzidas as distribuições de pressão e velocidades para os tamanhos  $\text{Max Face Size} = 4,0 \times 10^{-5} \text{ m}$  e  $\text{Max Face Size} = 3,5 \times 10^{-5} \text{ m}$ . Como se pode observar, o tamanho de  $\text{Max Face Size} = 4,0 \times 10^{-5} \text{ m}$  parece possuir precisão razoavelmente boa.

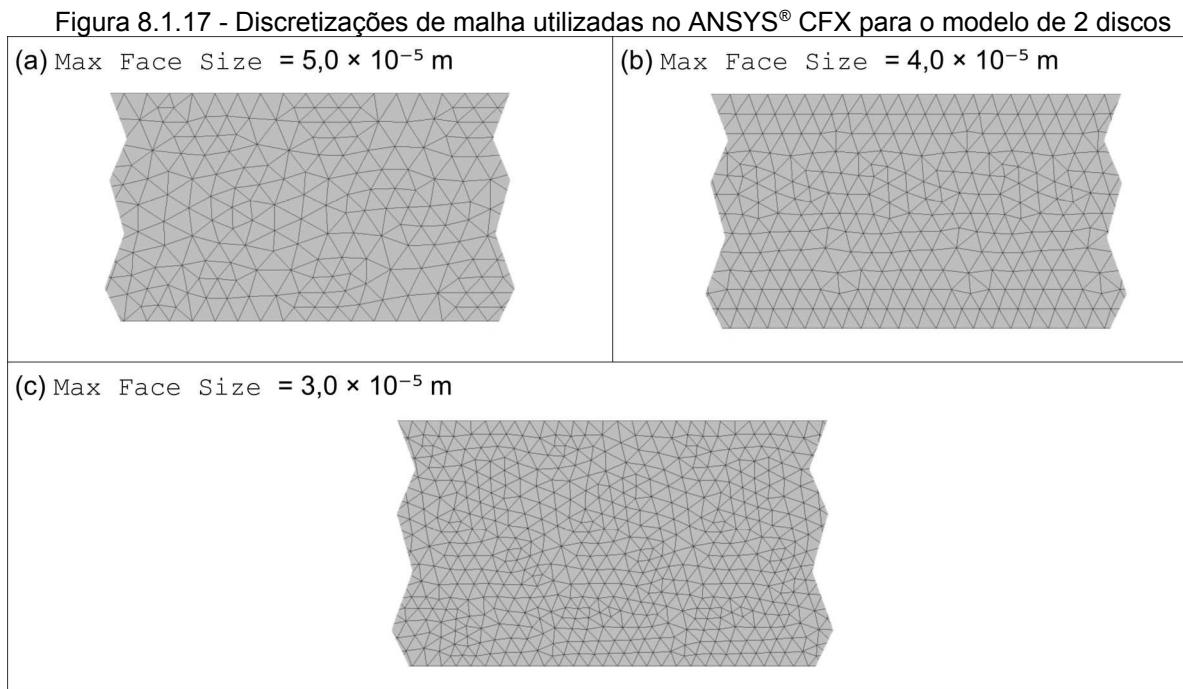
Figura 8.1.16 - Comparação de pressão e velocidade para os tamanhos de  $4,0 \times 10^{-5}$  m e  $3,5 \times 10^{-5}$  m no modelo de 2 discos com canal de entrada no ANSYS® CFX  
(\* Velocidade tangencial abs. (absoluta): No Stn. Frame ("Stationary Frame"))



Fonte: Própria (imagens elaboradas com o ANSYS® CFX)

### Modelo de 5 discos

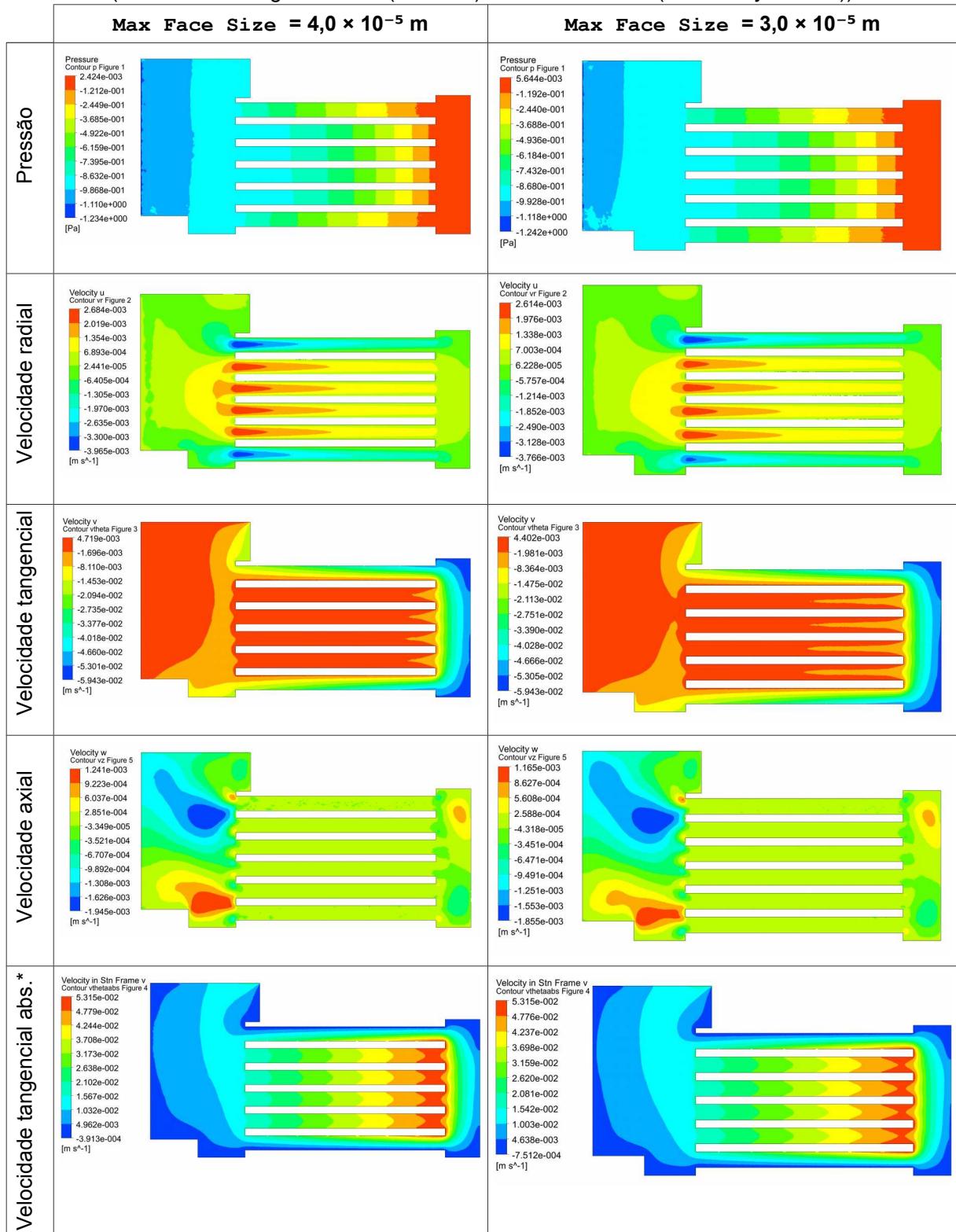
As discretizações utilizadas na malha do ANSYS® CFX estão reproduzidas na figura 8.1.17. Os elementos utilizados pelo ANSYS® CFX neste caso são tetraédricos/triangulares, como no modelo de 2 discos com canal de entrada.



Fonte: Própria (imagens elaboradas com o ANSYS® CFX e editadas no software GIMP)

Na figura 8.1.18, foram reproduzidas as distribuições de pressão e velocidades para os tamanhos  $\text{Max Face Size} = 4,0 \times 10^{-5}$  m e  $\text{Max Face Size} = 3,0 \times 10^{-5}$  m. Pode-se observar uma convergência razoável nesses gráficos.

Figura 8.1.18 - Comparação de pressão e velocidade para os tamanhos de  $4,0 \times 10^{-5}$  m e  $3,5 \times 10^{-5}$  m no modelo de 5 discos no ANSYS® CFX  
(\* Velocidade tangencial abs. (absoluta): No Stn. Frame ("Stationary Frame"))



Fonte: Própria (imagens elaboradas com o ANSYS® CFX)

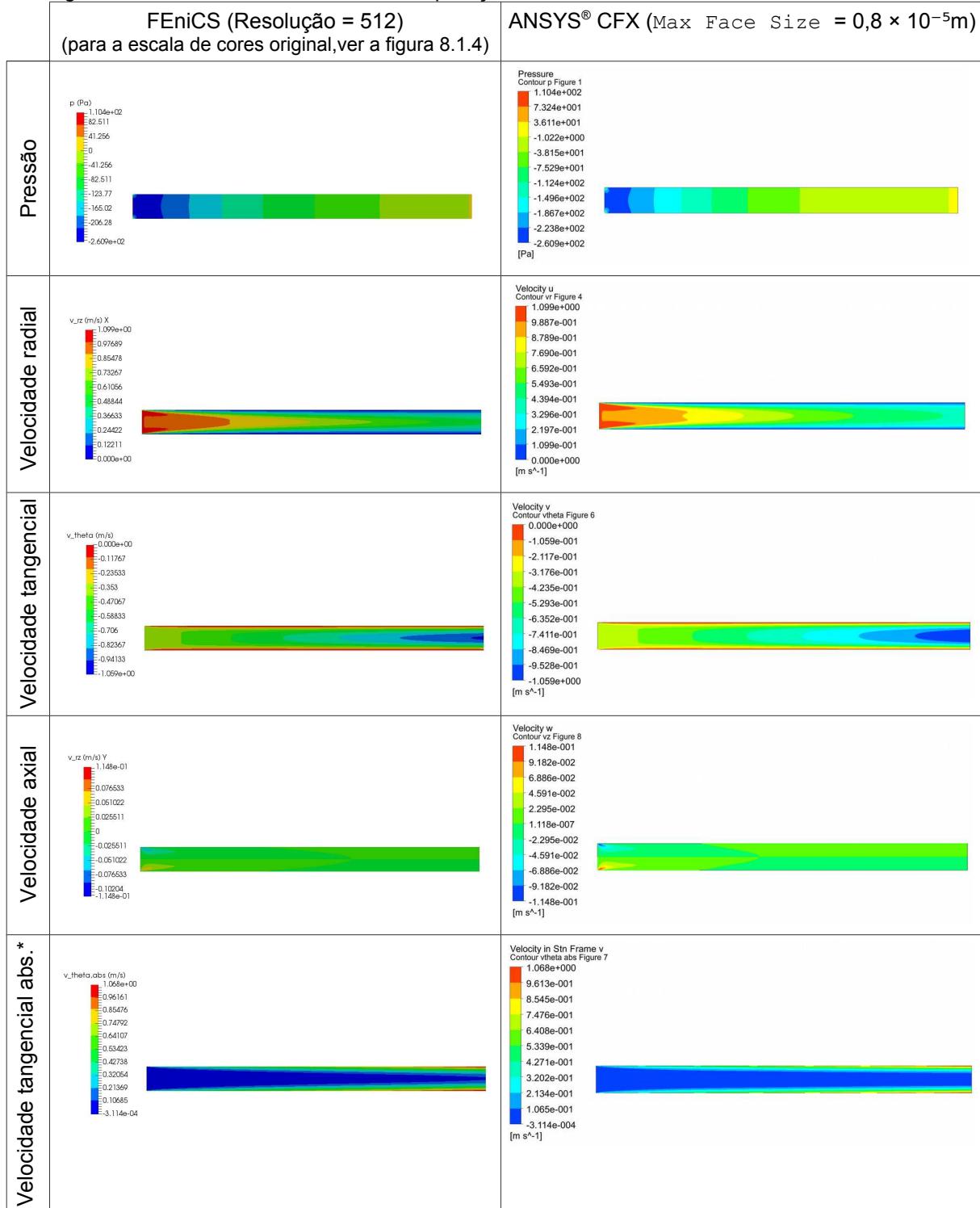
### 8.1.3 Comparação de resultados do FEniCS e do ANSYS® CFX

#### ***Modelo de 2 discos***

Na figura 8.1.19, foi feita uma comparação entre os resultados obtidos pelo FEniCS (resolução de 512) e pelo ANSYS® CFX (Max Face Size =  $0,8 \times 10^{-5}$  m). Para possibilitar uma comparação mais fácil de resultados, alterou-se a escala de cores dos resultados do FEniCS para a escala de cores utilizada no ANSYS® CFX. Como se pode perceber, os resultados estão altamente consistentes, mas nota-se uma diferença de velocidade tangencial na saída (à direita dos gráficos).

Essa diferença pode se dever ao tipo de elemento utilizado no ANSYS® CFX (volume finito cúbico/quadrado) e no FEniCS (elemento finito triangular), à diferença entre os critérios de convergência utilizados e também ao fato de a simulação no ANSYS® CFX ser uma simulação 3D de um modelo 2D .

Figura 8.1.19 - Modelo de 2 discos: Comparação de resultados do ANSYS® CFX e do FEniCS

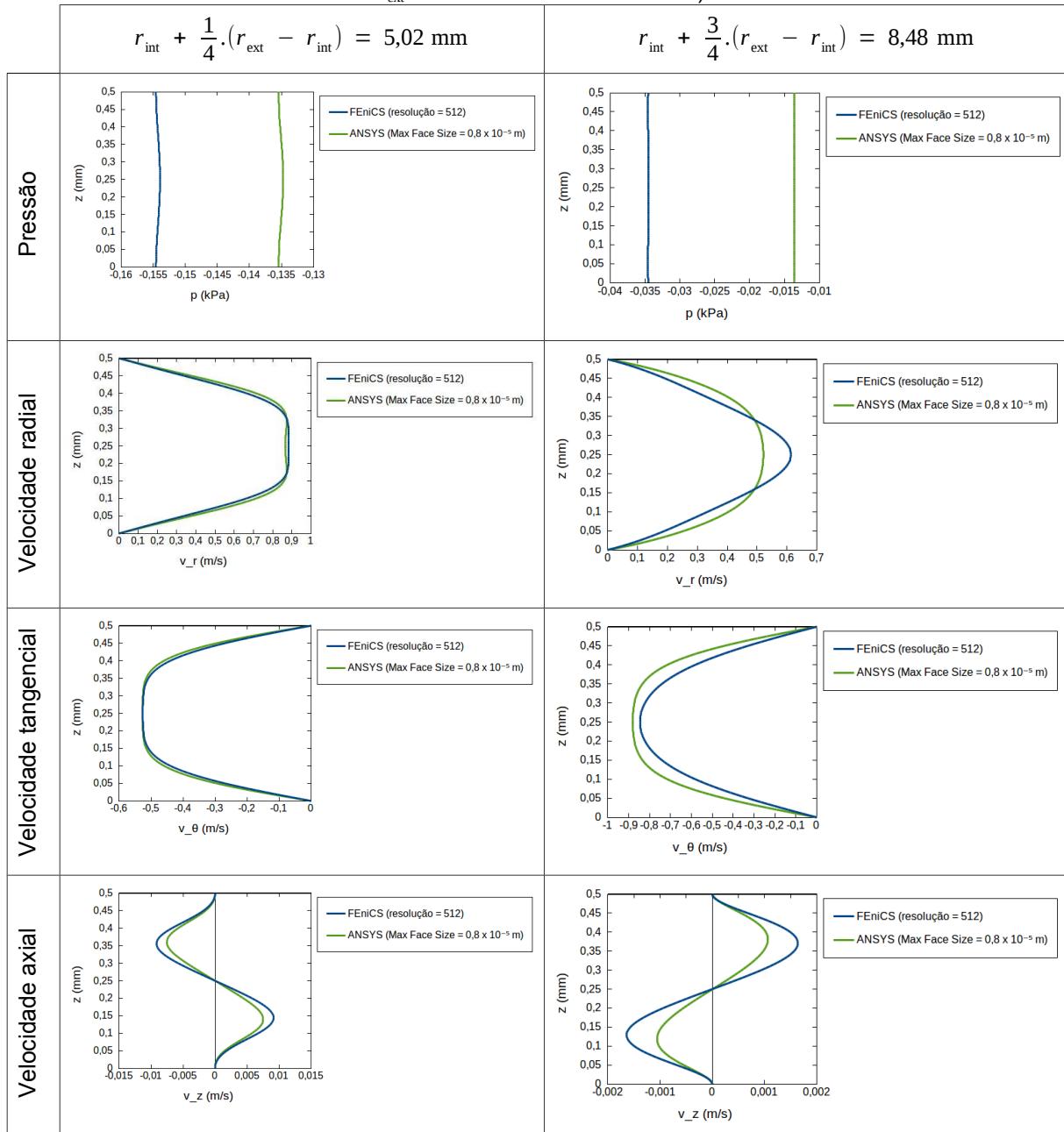


Fonte: Própria (imagens elaboradas com o ParaView e o ANSYS® CFX)

Para comparar os valores do FEniCS e do ANSYS® CFX com mais precisão, elaborou-se a figura 8.1.20 para o  $\frac{1}{4}$  inicial da malha e o  $\frac{1}{4}$  final da malha. Pode-se

observar que os gráficos mostram um certo grau de disparidade de valores. Nota-se que a pressão diminui mais rápido no ANSYS® CFX do que no FEniCS quando se prossegue para mais perto da saída dos discos.

Figura 8.1.20 - Comparação de perfis de pressão e velocidade em  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{3}{4}$  da dimensão radial do domínio para o modelo de 2 discos no FEniCS e no ANSYS® CFX (\*  $r_{\text{int}}$  é o raio interno dos discos, e  $r_{\text{ext}}$  é o raio externo dos discos)



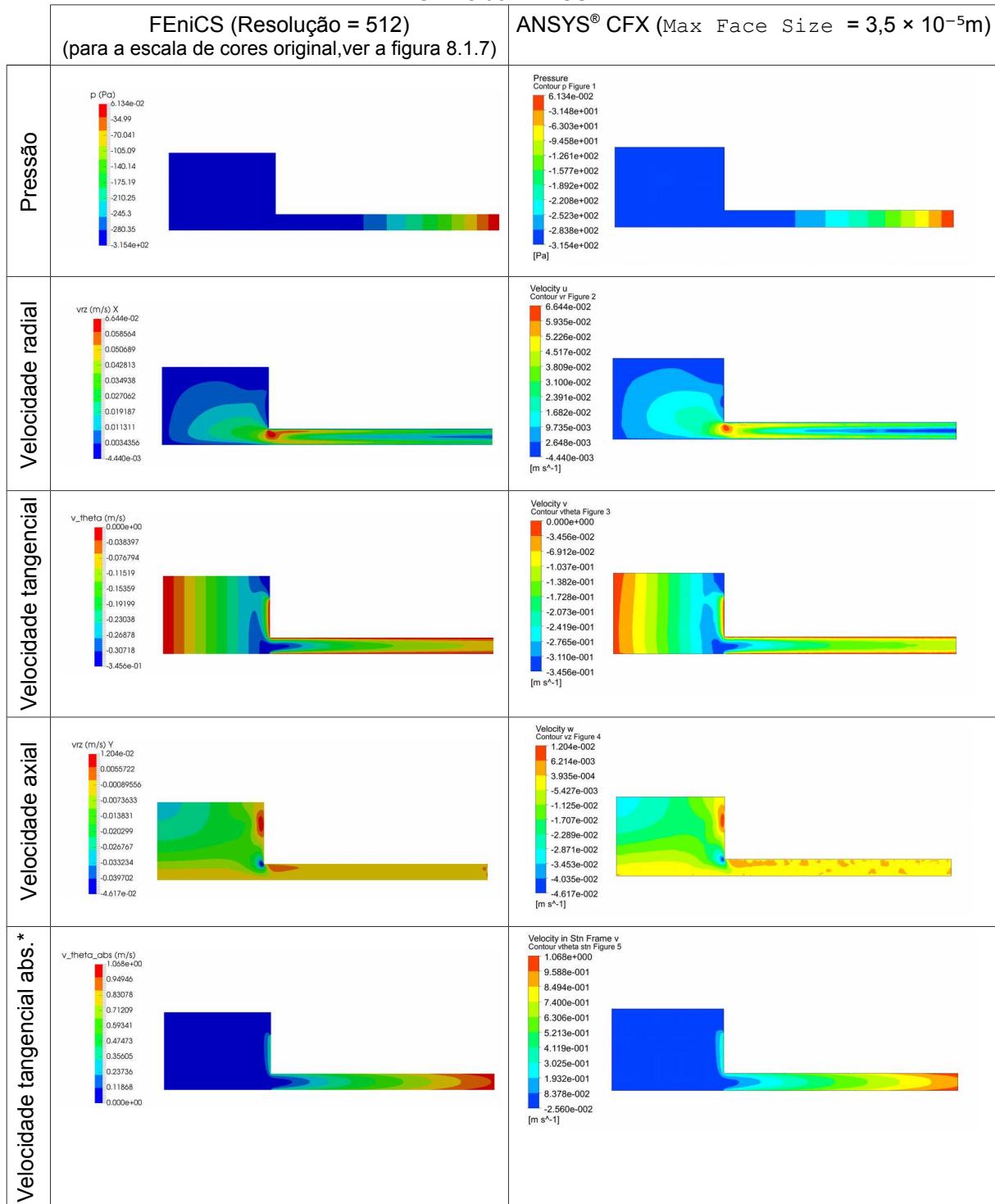
Fonte: Própria (gráficos elaborados com LibreOffice Calc a partir dos dados gerados pelo FEniCS e pelo ANSYS® CFX)

***Modelo de 2 discos com canal de entrada***

Na figura 8.1.21, foi feita uma comparação entre os resultados obtidos pelo FEniCS (resolução de 512) e pelo ANSYS® CFX (Max Face Size =  $3,5 \times 10^{-5}$  m). Para possibilitar uma comparação mais fácil de resultados, alterou-se a escala de cores dos resultados do FEniCS para a escala de cores utilizada no ANSYS® CFX. Como se pode perceber, existem algumas diferenças de distribuição de velocidade radial e tangencial no domínio.

Essas diferenças podem se dever ao tipo de elemento utilizado no ANSYS® CFX (volume finito tetraédrico/triangular) e no FEniCS (elemento finito triangular), à diferença entre os critérios de convergência utilizados e também ao fato de a simulação no ANSYS® CFX ser uma simulação 3D de um modelo 2D.

Figura 8.1.21 - Modelo de 2 discos com canal de entrada: Comparação de resultados do ANSYS® CFX e do FEniCS



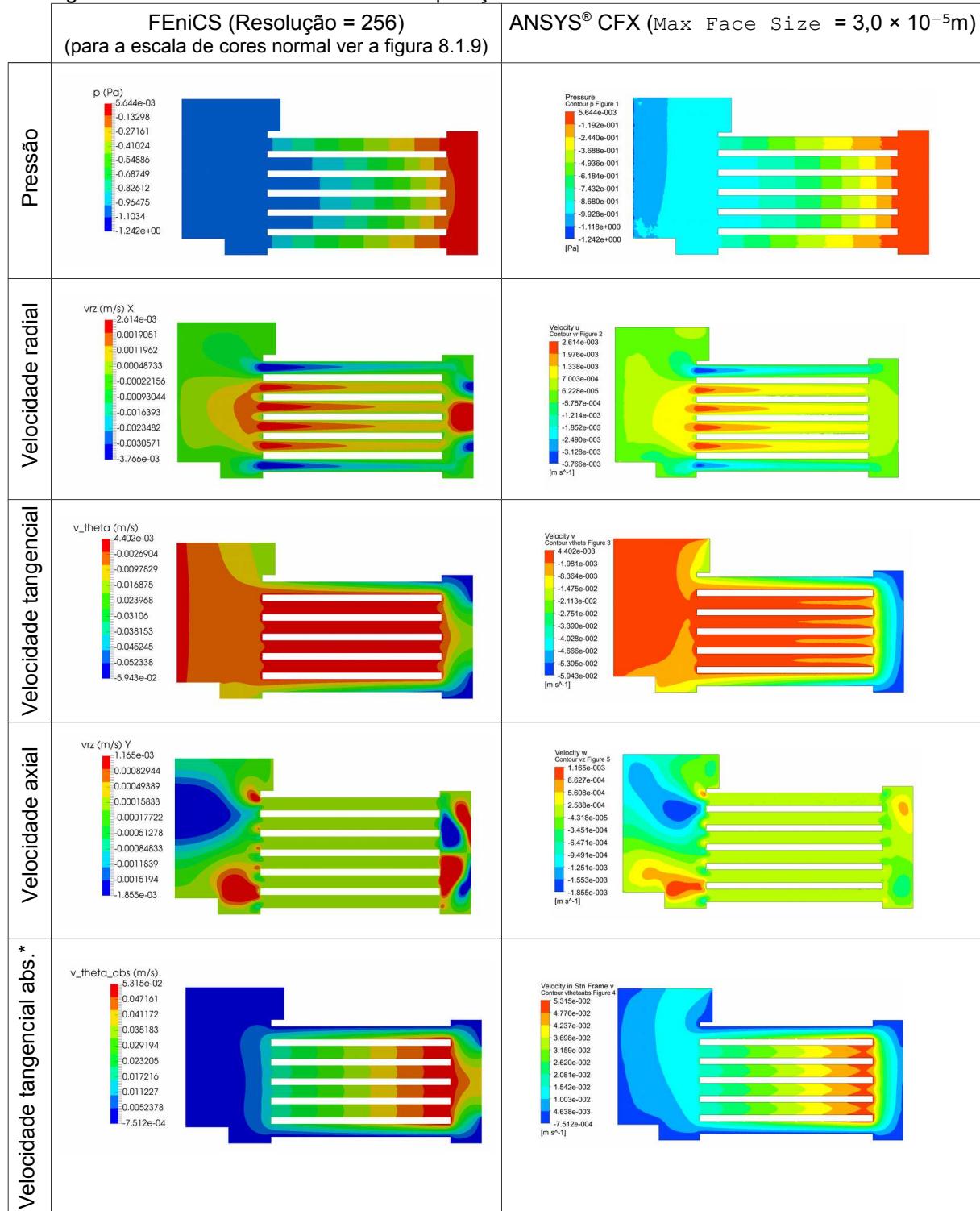
Fonte: Própria (imagens elaboradas com o ParaView e o ANSYS® CFX)

***Modelo de 5 discos***

Na figura 8.1.22, foi feita uma comparação entre os resultados obtidos pelo FEniCS (resolução de 256) e pelo ANSYS® CFX (Max Face Size =  $3,0 \times 10^{-5}$  m). Para possibilitar uma comparação mais fácil de resultados, alterou-se a escala de cores dos resultados do FEniCS para a escala de cores utilizada no ANSYS® CFX.

As diferenças observadas entre os resultados podem se dever ao tipo de elemento utilizado no ANSYS® CFX (volume finito tetraédrico/triangular) e no FEniCS (elemento finito triangular), à diferença entre os critérios de convergência utilizados, ao fato de a simulação no ANSYS® CFX ser uma simulação 3D de um modelo 2D e ao elevado número de Reynold observado na simulação com o FEniCS (figura 8.1.10).

Figura 8.1.22 - Modelo de 5 discos: Comparação de resultados do ANSYS® CFX e do FEniCS



Fonte: Própria (figuras elaboradas com o ParaView e o ANSYS® CFX)

## 8.2 ANÁLISE PARAMÉTRICA DO ROTOR DA BOMBA TESLA DE CDs

Para auxiliar no projeto da bomba Tesla de CDs, foi realizada uma análise de espaçamento entre discos. O modelo utilizado foi o modelo de 2 discos sem canal de entrada, por este ser mais simples e, portanto, mais fácil de atingir a convergência no método de Newton-Raphson.

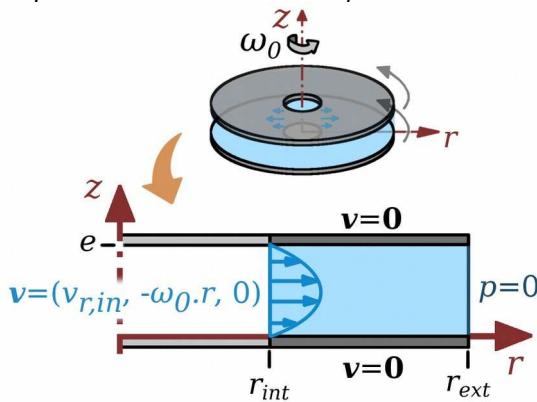
Como a simulação tem que ser feita com as propriedades reais da água ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 0,001 \text{ Pa.s}$ ), que apresentam uma diferença de magnitude de  $10^6$  vezes, tem-se um problema numérico de soma de matrizes com valores de magnitudes muito diferentes, em que a matriz com maior magnitude “suplanta” a de menor magnitude. Isso acaba por levar o método de Newton-Raphson a divergir. Para amenizar esse efeito, implementou-se um método de continuação (“*continuation method*”) na viscosidade dinâmica ( $\mu$ ) da água, em que se reduz gradativamente o valor de  $\mu$  entre iterações, usando o valor da solução (pressão e velocidade) de cada iteração como estimativa inicial na próxima iteração. Esse processo se repete até chegar no  $\mu$  da água. No caso do modelo de 2 discos sem canal de entrada, esse método levou o método a convergir. Notou-se que, ao simular com 5 discos, a convergência do método foi consideravelmente degradada, levando-o a divergir, mesmo com passos de  $\mu$  tão pequenos quanto 0,0001 Pa.s (nesse caso, a divergência aconteceu em 0,0096 Pa.s).

De modo à condição de contorno de entrada dos discos naturalmente satisfazer a condição de não-escorregamento dos cantos da entrada (i.e., sem ter que impor essa condição forçadamente, como no caso de um perfil constante de velocidade, analisado anteriormente), utilizou-se uma entrada de fluido parabólica entre os discos (figura 8.2.1).

As equações foram escaladas conforme o sistema CGS (Centímetros-Gramas-Segundos) para tentar melhorar a precisão dos cálculos das matrizes do Método de Elementos Finitos (i.e., multiplicou-se a unidade de comprimento por  $10^2$  e multiplicou-se a unidade de massa por  $10^3$ ).

Utilizaram-se as dimensões de um CD para as simulações, com uma rotação dos discos de 500 rpm. Os parâmetros de simulação se encontram na tabela 8.2.1.

Figura 8.2.1 - Modelo de 2 discos com entrada parabólica  
(\* A saída é aberta para a atmosfera usando  $p = 0$  como referência de pressão)



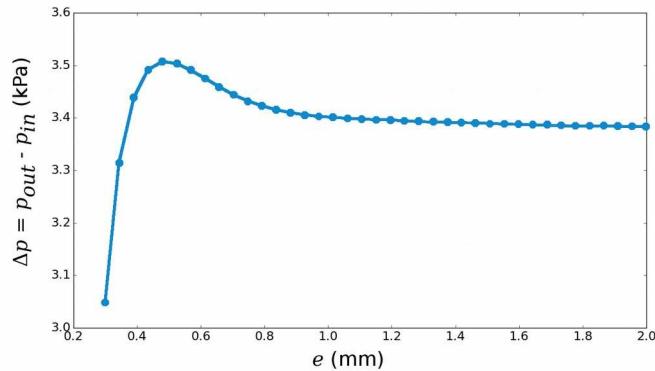
Fonte: Própria (figura elaborada com o GIMP)

Tabela 8.2.1 - Parâmetros do modelo utilizado para simulação do modelo da bomba Tesla de CDs

Parâmetros de entrada					
Rotação ( $n$ )	500 rpm	Vazão de entrada ( $Q$ )	0,5 L/min		
Pressão na saída	0 Pa	Perfil de velocidade de entrada	Parabólico		
Dimensões					
$r_{int}$	7,5 mm	$r_{ext}$	60 mm		
Malha					
320 × 20 partições retangulares de 4 triângulos a partir de suas diagonais. Número de nós: 13.141 Número de elementos: 25.600 Máximo diâmetro de elemento: 0,1640625 mm			Retângulo		
Método de continuação em $\mu$ (Pa.s)					
100 → 10 → 1 → 0,1 → 0,01 → 0,001					

Para averiguar a existência de um espaçamento ótimo entre discos, primeiramente verificou-se a operação do dispositivo Tesla, em que a pressão de entrada deve ser menor do que a pressão de saída para ter comportamento de bomba. Na figura 8.2.2, pode-se observar a variação de pressão entre entrada e saída. Nota-se que ela é positiva (comportamento de bomba) em espaçamentos maiores do que aproximadamente 0,3 mm.

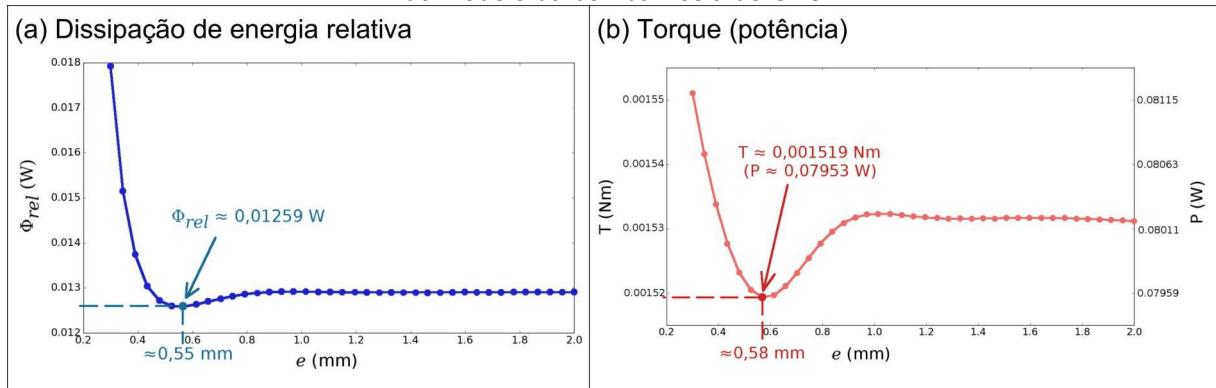
Figura 8.2.2 - Verificação de pressão com relação ao espaçamento nas simulações de dois discos da bomba Tesla de CDs



Fonte: Própria (figura elaborada com a biblioteca Matplotlib de Python)

Na figura 8.2.3, estão os gráficos para a dissipação de energia relativa e o torque em função do espaçamento entre discos.

Figura 8.2.3 - Dissipação de energia relativa e torque (potência) para simulação do modelo da bomba Tesla de CDs



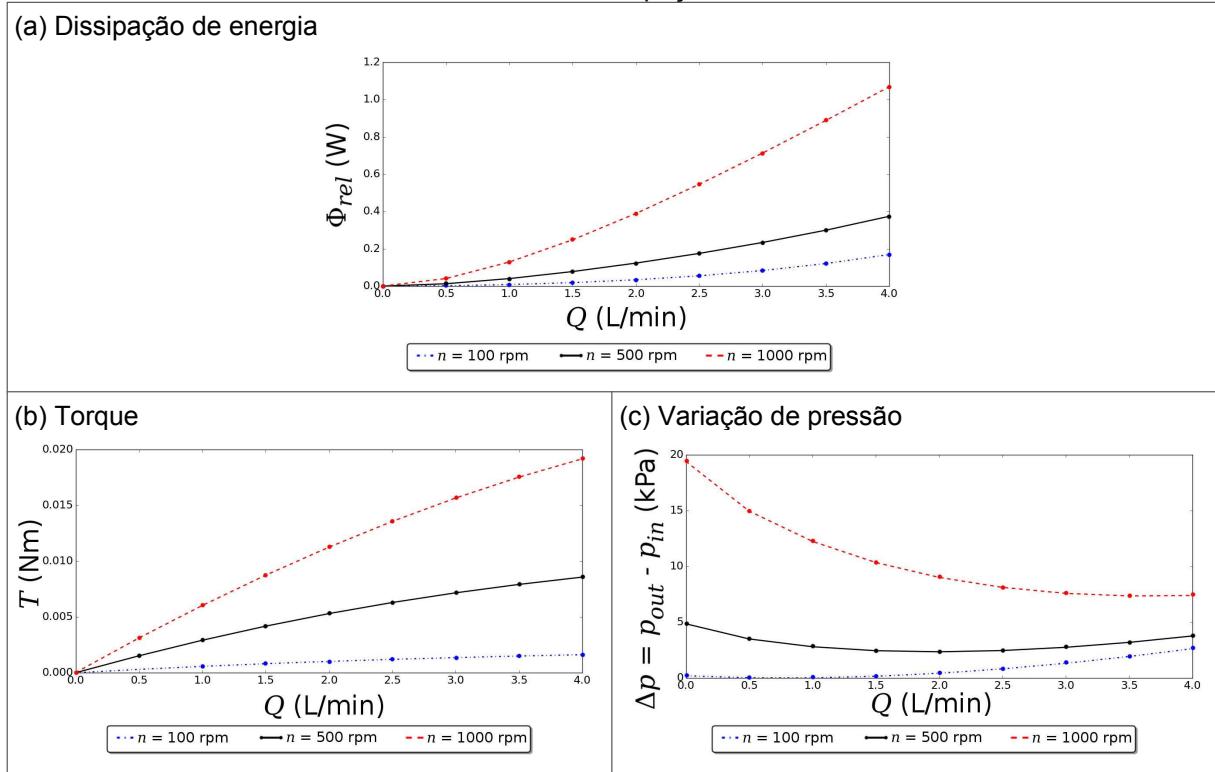
Fonte: Própria (imagens elaboradas com a biblioteca Matplotlib de Python)

Pode-se notar, nos gráficos acima, que, para otimizar a dissipação de energia para CDs com rotação de 500 rpm e vazão de 0,5 L/min, existem pontos de mínimo para a dissipação de energia em **0,55 mm** e para o torque em 0,58 mm. Utilizando-se espaçamento de 0,55 mm, analisou-se o efeito da vazão e da rotação (figura 8.2.4).

Na figura 8.2.4c (variação de pressão), pode-se observar que até pelo menos 100 rpm o dispositivo ainda funciona como bomba em vazões baixas. O

comportamento parabólico da variação de pressão é devido à dissipação de energia viscosa, que é proporcional ao quadrado da vazão.

Figura 8.2.4 - Curvas em função da vazão entre dois discos da bomba Tesla de CDs com espaçamento de 0,55 mm

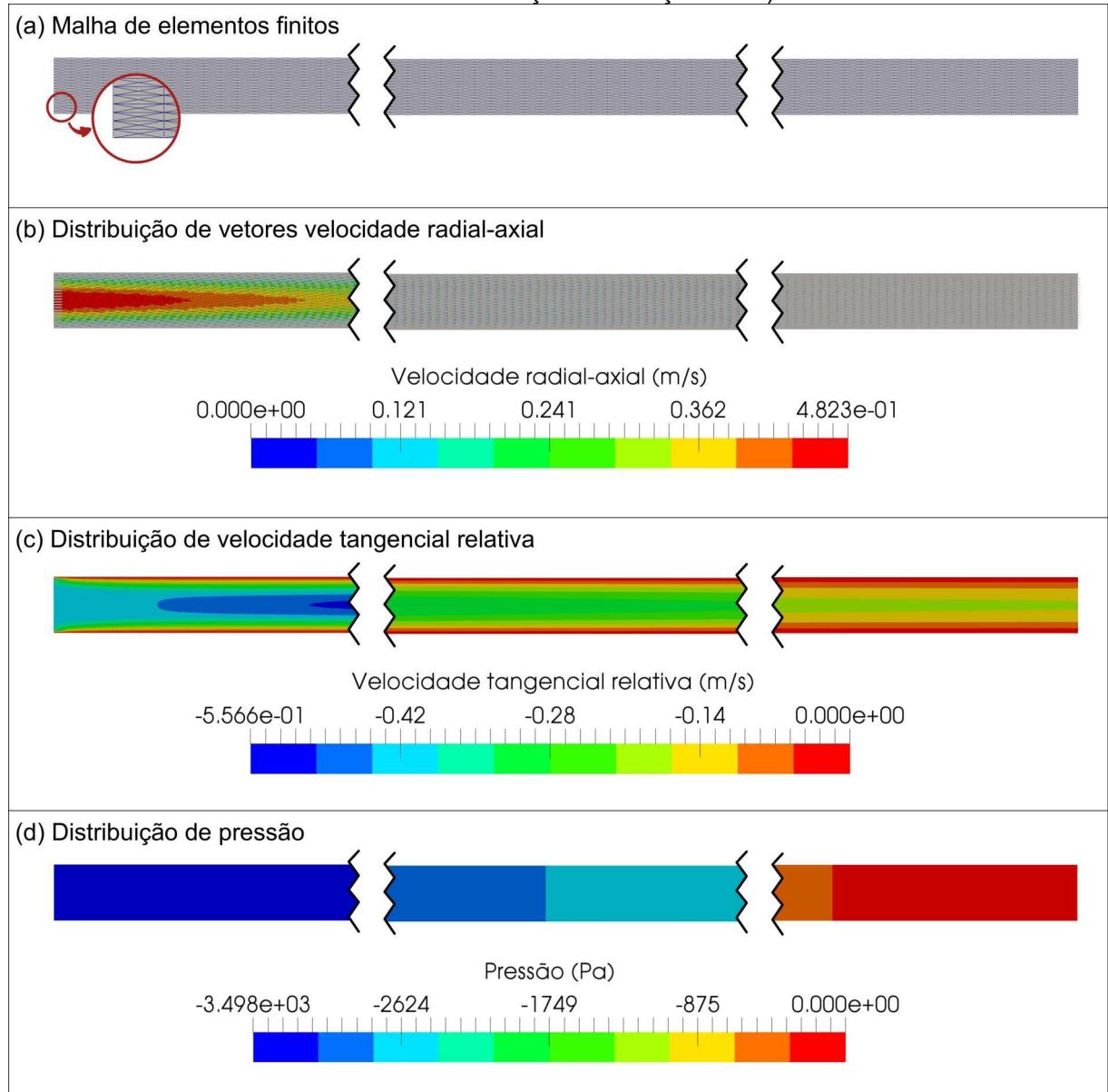


Fonte: Própria (imagens elaboradas com a biblioteca Matplotlib de Python)

Para uma bomba Tesla de CDs com 5 discos (i.e., 4 espaçamentos entre discos), a conversão das simulações de 2 discos pode ser feita pela multiplicação dos valores de dissipação de energia, potência e torque por 4.

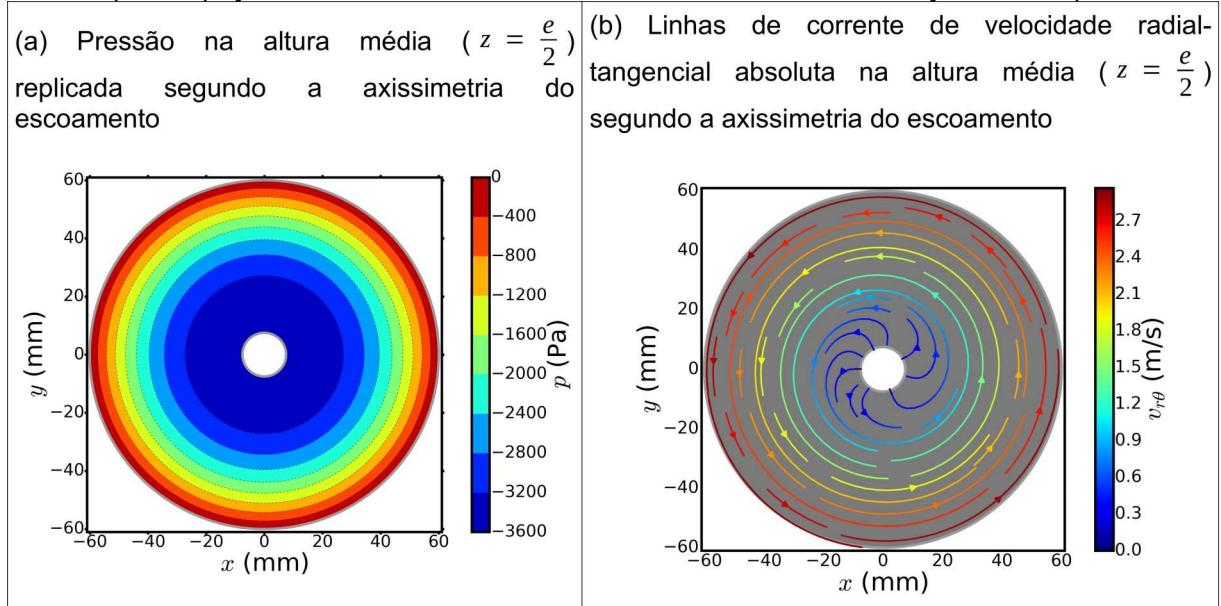
O resultado da simulação para 0,55 mm de espaçamento entre discos, 0,5 L/min e 500 rpm está nas figuras 8.2.5 e 8.2.6 e seus parâmetros na tabela 8.2.2. Neste caso, utilizou-se o sistema MMGS (Milímetros-Gramas-Segundos) para resolver as equações do Método de Elementos Finitos (i.e., multiplicou-se a unidade de comprimento por  $10^3$  e multiplicou-se a unidade de massa por  $10^3$ ) e não houve necessidade de utilizar o método de continuação na viscosidade dinâmica, da tabela 8.2.1.

Figura 8.2.5 - Resultado da simulação para espaçamento de 0,5 mm, vazão volumétrica de 0,5 L/min e rotação de 500 rpm (\* Como o domínio de simulação possui um comprimento radial muito maior do que o espaçamento axial, foram plotados somente o início, o meio e o fim das distribuições na direção radial)



Fonte: Própria (imagens elaboradas com o GIMP e o ParaView)

Figura 8.2.6 - Plotagens por replicação segundo axissimetria na altura média ( $z = \frac{e}{2}$ ), da simulação para espaçamento de 0,5 mm, vazão volumétrica de 0,5 L/min e rotação de 500 rpm

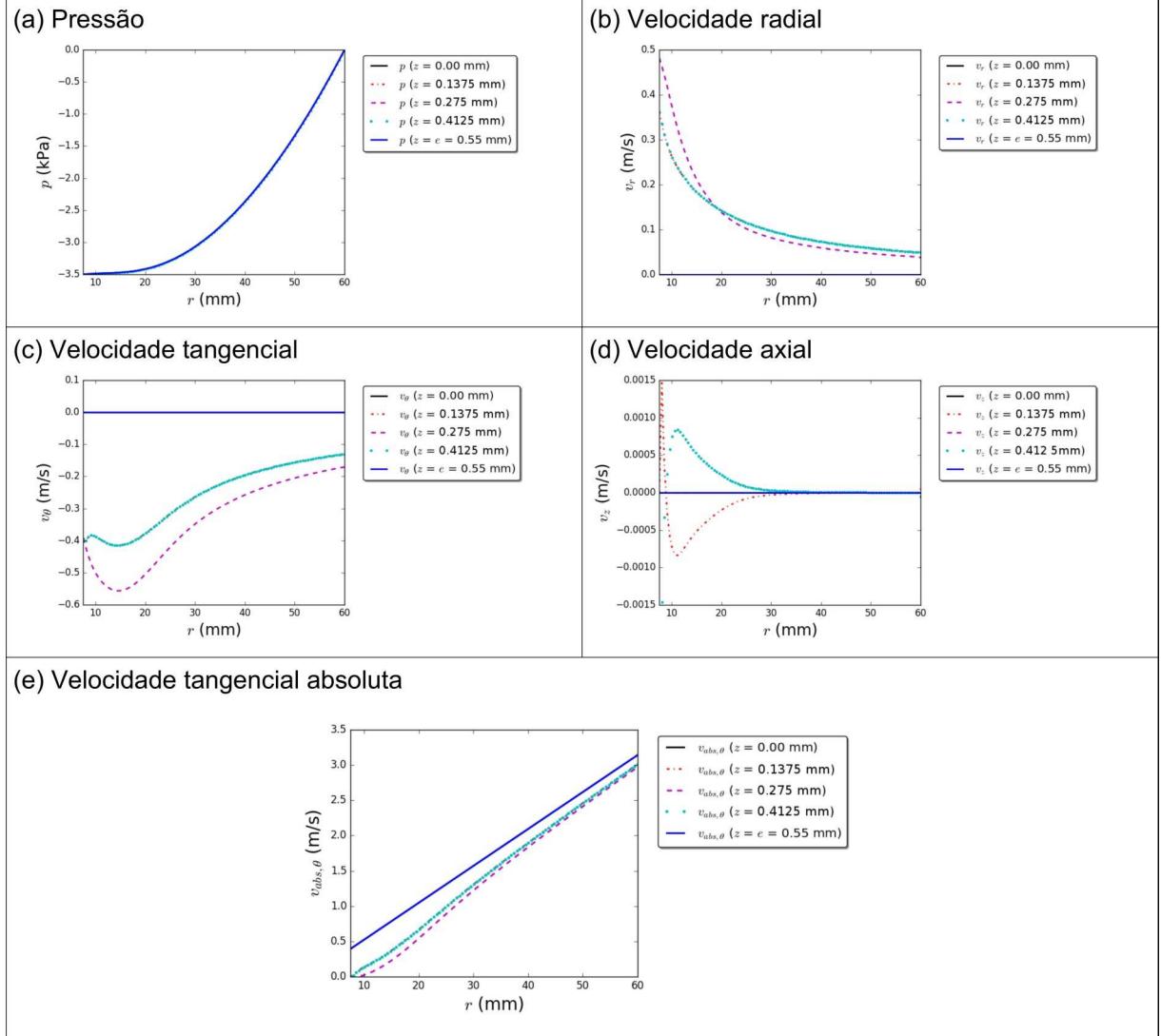


Fonte: Própria (imagens elaboradas com o GIMP e a biblioteca Matplotlib de Python)

Tabela 8.2.2 - Parâmetros resultantes da simulação para espaçamento de 0,5 mm, vazão volumétrica de 0,5 L/min e rotação de 500 rpm

Parâmetros básicos			Funções de interesse	
Variação de pressão ( $\Delta p$ )	$3,4969 \times 10^3$ Pa		Dissipação de energia ( $\Phi_{rel}$ )	$1,2588 \times 10^{-2}$ W
Vazão volumétrica ( $Q$ )	0,5 L/min		Potência ( $P_f$ )	$7,9569 \times 10^{-2}$ W
Carga manométrica ( $H$ )	$8,1689 \times 10^{-1}$ m		Vorticidade ( $\xi_{V,rel}$ )	$2,4116 \text{ m}^2/\text{s}^2$
Parâmetros adimensionais				
Camada limite	$\text{Ph}$	3,9798		
Regime de escoamento	$\text{Re}_{ext, \ell, \text{máx}}$	$3,7871 \times 10^4$		
	$\text{Nd}_{ext, \ell, \text{máx}}$	3,1822		
Vazão volumétrica	$A$	$8,1481 \times 10^1$		
Eficiência	$\eta_s$	36,6232 %		

Como se esperava, o escoamento na figura 8.2.6b possui formato espiral muito similar ao da figura 1.1.6. A figura 8.2.7 mostra a progressão da pressão e da velocidade em diferentes alturas  $z$ . A progressão de perfis de velocidade é muito similar a da figura 8.1.5.

Figura 8.2.7 - Progressão da pressão e da velocidade em diferentes alturas  $z$ 

Fonte: Própria (gráficos elaborados com a biblioteca Matplotlib de Python)

Percebe-se que a pressão (figura 8.2.7a) aumenta de forma parabólica uniformemente no espaçamento entre os discos (todas as curvas estão sobrepostas), enquanto que as velocidades radial (figura 8.2.7b), tangencial relativa (figura 8.2.7c) e axial (figura 8.2.7d) decaem de forma aproximadamente exponencial após dada distância radial. A velocidade tangencial absoluta (figura 8.2.7e) possui aumento aproximadamente linear, como se esperava, porque ela aumenta com  $+\omega_0 \cdot r$  (relação linear). Em todos os gráficos da figura 8.2.7, as curvas

simétricas com relação à altura média ( $z = \frac{e}{2}$ ) estão sobrepostas, enfatizando que, neste modelo de simulação existe simetria em  $z$ .

### 8.3 SIMULAÇÃO DA VOLUTA DA BOMBA TESLA DE CDs

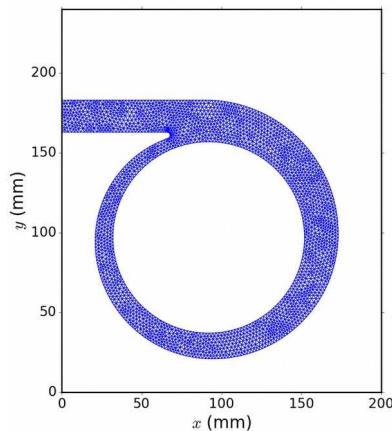
A voluta da bomba Tesla de CDs foi projetada do modo convencional na seção “7.1.1 Projeto de bomba Tesla de CDs” (conforme a figura 7.1.5). O desenho foi feito em CAD, sendo passado para o ANSYS® para gerar uma malha de elementos finitos triangulares. Os parâmetros utilizados para gerar a malha de elementos finitos no ANSYS® estão na tabela 8.3.1.

Tabela 8.3.1 - Parâmetros dos elementos da malha e estatísticas no ANSYS® (\* Todos os demais parâmetros foram deixados com os seus valores *default*)

Tamanho do elemento (Sizing)	
Parâmetro	Valor
Size Function	Curvature
Relevance Center	Fine
Initial Seed Size	Active Assembly
Transition	Slow
Span Angle Center	Fine
Curvature Normal Angle	5,0°
<b>Min Size</b>	<b>1,0e-003 m</b>
<b>Max Face Size</b>	<b>2,0e-003 m</b>
Max Tet Size	Default (2,0201e-004 m)
Growth Rate	Default (1,20)
Automatic Mesh Based on Defeaturing	On
Defeature Size	Default (5,0502e-007 m)
Estatísticas (Statistics)	
Parâmetro	Valor
Número de nós (Statistics > Nodes)	2580
Número de elementos (Statistics > Elements)	4650

A malha de elementos finitos gerada está na figura 8.3.1. O raio de arredondamento da lingueta (“quebra-fluxo”, “tongue”, “cutwater”) utilizado é de 2 mm.

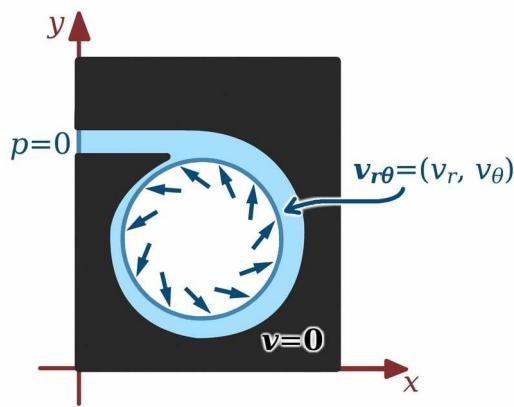
Figura 8.3.1 - Malha de elementos finitos para a voluta da bomba Tesla de CDs



Fonte: Própria (imagem elaborada com a biblioteca `Matplotlib` de Python)

As condições de contorno usadas na simulação estão indicadas na figura 8.3.2.

Figura 8.3.2 - Modelo para simulação da voluta da bomba Tesla de CDs  
(\* A saída é aberta para a atmosfera usando  $p = 0$  como referência de pressão)



Fonte: Própria (figura elaborada com o GIMP)

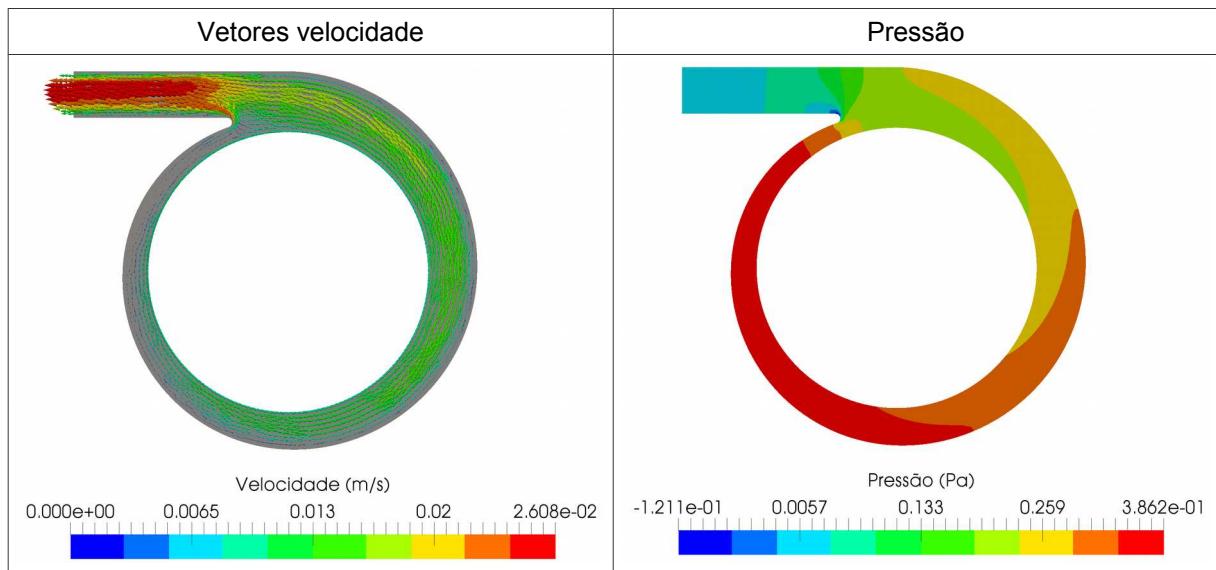
Como a velocidade tangencial absoluta no espaçamento entre discos é bastante elevada (na ordem de 3 m/s devido à rotação dos discos), o número de Reynolds resulta elevado, dificultando a convergência das simulações. Assim, para

simular no regime de escoamento laminar, as simulações foram realizadas com velocidades menores ( $v_r = 0,001 \text{ m/s}$  e  $v_{\theta, \text{abs}} = 0,0100 \text{ m/s}$ ), o que significa uma vazão de  $0,0124 \text{ L/min}$  para espaçamento  $0,55 \text{ mm}$ .

As equações foram escaladas conforme o sistema CGS (Centímetros-Gramas-Segundos) (i.e., multiplicou-se a unidade de comprimento por  $10^2$  e multiplicou-se a unidade de massa por  $10^3$ ). Para auxiliar na convergência da simulação usando água, utilizou-se o método de continuação na viscosidade dinâmica ( $\mu$ ) na forma (Pa s):  $100 \rightarrow 10 \rightarrow 1 \rightarrow 0,5 \rightarrow 0,1 \rightarrow 0,05 \rightarrow 0,01 \rightarrow 0,005 \rightarrow 0,004 \rightarrow 0,003 \rightarrow 0,0025 \rightarrow 0,002 \rightarrow 0,0015 \rightarrow 0,0012 \rightarrow 0,0011 \rightarrow 0,001$ .

As distribuições de pressão e velocidade estão na figura 8.3.3 e os parâmetros da voluta estão na tabela 8.3.2. Os valores dos parâmetros para  $0,55 \text{ mm}$  foram obtidos por multiplicação dos parâmetros calculados na otimização para espessura unitária (“1 m”), porque o modelo utilizado é 2D.

Figura 8.3.3 - Pressão e velocidade na simulação da voluta da bomba Tesla de CDs



Fonte: Própria (figuras elaboradas com o ParaView)

Tabela 8.3.2 - Parâmetros da simulação da voluta da bomba Tesla de CDs

	Para espessura unitária (“1 m”) (valores por metro)	Para espaçamento de 0,55 mm
Vazão ( $Q$ )	22,6194 L/min	0,0124 L/min
Variação de pressão ( $\Delta p$ )	$-2,9696 \times 10^{-1}$ Pa	$-1,6333 \times 10^{-4}$ Pa
Carga manométrica ( $H$ )	$-9,8409 \times 10^{-6}$ m	$-5,4125 \times 10^{-9}$ m
Dissipação de energia ( $\Phi$ )	$3,7986 \times 10^{-5}$ W	$2,0892 \times 10^{-8}$ W
Vorticidade ( $\xi_v$ )	$3,6605 \times 10^{-2}$ m $^2$ /s $^2$	$2,0132 \times 10^{-5}$ m $^2$ /s $^2$
Número de Reynolds ( $Re_{\ell, \text{máx}}$ )	$8,1716 \times 10^3$	

## 8.4 VERIFICAÇÃO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLOGÍGICA

A utilização de um fluido com as propriedades da água na otimização é dificultada pela grande disparidade de valores entre a densidade e a viscosidade dinâmica da água (uma diferença de  $10^6$  vezes), que acaba frequentemente levando à divergência. Assim, em otimização topológica, para verificação de conceitos, costumam ser utilizadas propriedades de fluido fictício, como viscosidade dinâmica ( $\mu$ ) de 0,1 Pa.s, e densidade ( $\rho$ ) de 1,0 kg/m $^3$ .

Como a bomba Tesla é movida por atrito, as suas características dependem fortemente das propriedades do fluido utilizado. Portanto, foram utilizadas as propriedades reais da água (viscosidade dinâmica ( $\mu$ ) de 0,001 Pa.s, e densidade ( $\rho$ ) de 1000,0 kg/m $^3$ ). Para auxiliar na convergência, podem ser utilizados:

1. Método de continuação em  $\mu$  (como o utilizado na seção “8.2 ANÁLISE PARAMÉTRICA DO ROTOR DA BOMBA TESLA DE CDs”) e/ou em  $\rho$ ;
2. Redução das dimensões do domínio de projeto;
3. Aumento da resolução da malha de elementos finitos;
4. Redução das velocidades envolvidas;
5. Resolver primeiramente as equações de Stokes e utilizar o resultado como estimativa inicial ao resolver as equações de Navier-Stokes.

Nas otimizações realizadas, optou-se por priorizar os itens 2, 3 e 4 acima. Assim, caso seja utilizado algum outro item dos acima, esse será explicitado claramente na ocasião.

No otimizador (IPOPT), foi utilizada aproximação da matriz Hessiana pelo método de quasi-Newton com uso limitado de memória (“*limited-memory*”) e tolerância relativa desejada de  $10^{-10}$ .

Como forma de escalar as equações para forma a tentar melhorar a precisão dos cálculos de funcionais e sensibilidades, utilizou-se o sistema CGS (Centímetros-Gramas-Segundos) para a voluta (i.e., multiplicou-se a unidade de comprimento por  $10^2$  e multiplicou-se a unidade de massa por  $10^3$ ), e o sistema MMGS (Milímetros-Gramas-Segundos) para o rotor (i.e., multiplicou-se a unidade de comprimento por  $10^3$  e multiplicou-se a unidade de massa por  $10^3$ ).

O referencial utilizado na otimização foi o referencial relativo, que rotaciona em conjunto com os discos. Como estimativa inicial para a velocidade inicial do fluido, foi considerado que ele estivesse parado no referencial absoluto. Isso significa que, no referencial relativo, ele está girando em sentido inverso à rotação do referencial.

O critério de convergência para simulação foi baseado em resíduos: tolerância absoluta (“*absolute tolerance*”) de  $10^{-7}$ , e tolerância relativa (“*relative tolerance*”) de  $10^{-7}$ . Para a otimização, o critério de convergência se baseou em uma tolerância relativa desejada de  $10^{-10}$ .

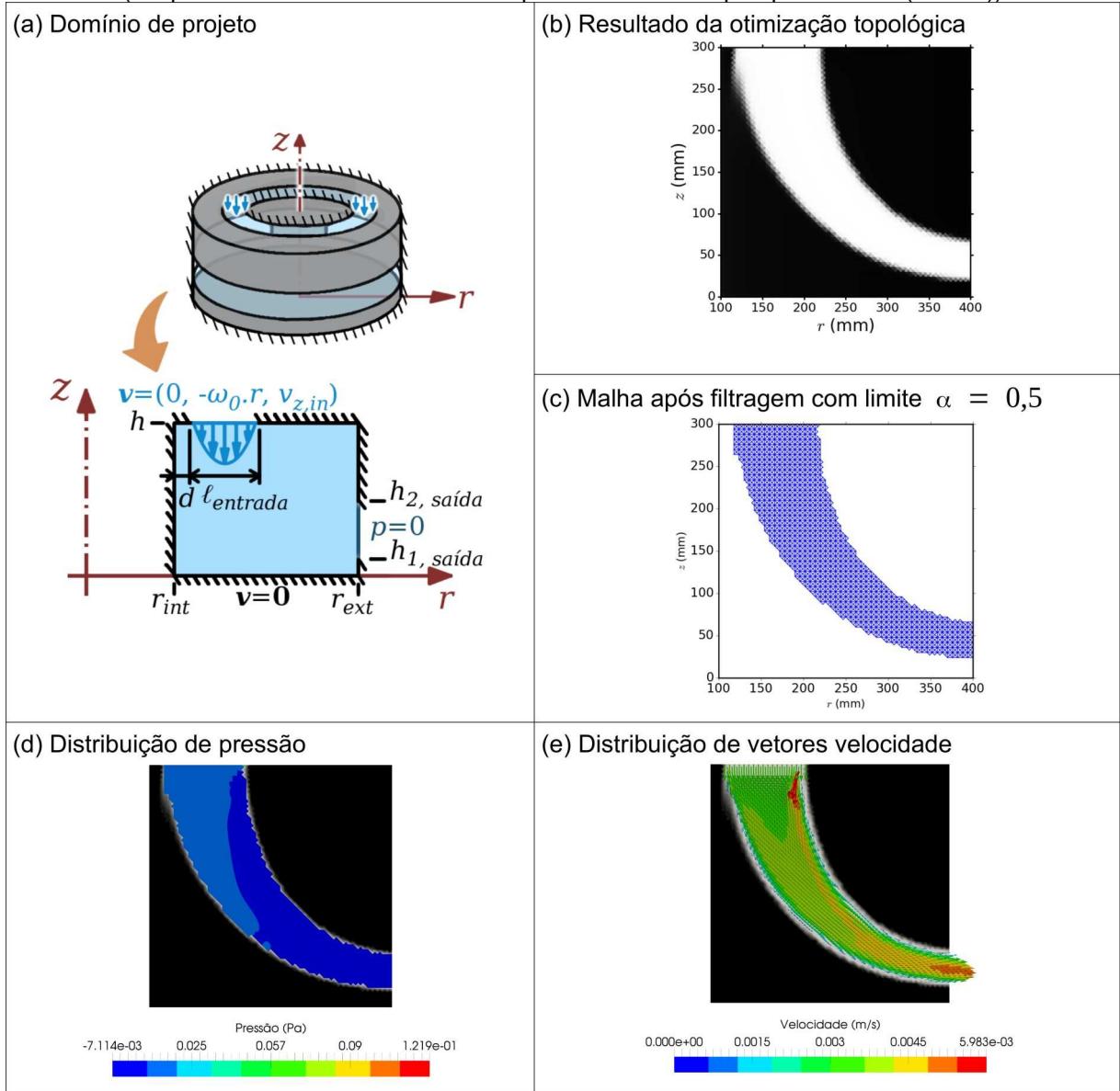
As plotagens da configuração otimizada da malha realizadas com a biblioteca Matplotlib de Python consideram os valores da variável de projeto  $\alpha$  no ponto médio de cada elemento.

Antes de otimizar a bomba Tesla, verificou-se a otimização topológica entre uma entrada e uma saída, de forma a criar um canal entre os dois.

O canal axissimétrico consiste na otimização topológica a partir da imposição de uma entrada e uma saída em um domínio anelar. O resultado pode ser visto na figura 8.4.1 e os parâmetros usados podem ser vistos na tabela 8.4.1. As regiões pretas da figura 8.4.1b representam sólido, enquanto que as regiões brancas representam fluido. Para otimização, foi utilizado o modelo de material de Borrvall e Petersson (2003) e o sistema CGS para escalar as equações.

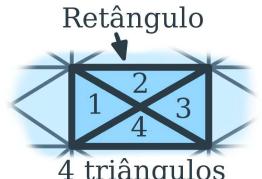
Figura 8.4.1 - Otimização topológica de canal axissimétrico

(\* A pressão e a velocidade são computadas na malha pós-processada (filtrada))



Fonte: Própria (imagens elaboradas com o GIMP, a biblioteca Matplotlib de Python e o ParaView)

Tabela 8.4.1 - Parâmetros do modelo utilizado para otimização topológica do canal axissimétrico

Parâmetros de entrada			
Rotação ( $n$ )	0 rpm	Vazão de entrada ( $Q$ )	20 L/min
Pressão na saída	0 Pa *	Perfil de velocidade de entrada	Parabólico
Forças de corpo	$\rho \cdot \mathbf{f} = (0, 0, 0)$		
Dimensões			
$r_{\text{int}}$	100 mm	$d$	20 mm
$r_{\text{ext}}$	400 mm	$h_{1,\text{saída}}$	20 mm
$h$	300 mm	$h_{2,\text{saída}}$	120 mm
$\ell_{\text{entrada}}$	100 mm		
Malha			
50 × 50 partições retangulares de 4 triângulos a partir de suas diagonais.			
Número de nós: 5.101 Número de elementos: 10.000 Máximo diâmetro de elemento: 6 mm			
Estimativa inicial de distribuição da pseudo-densidade ( $\alpha$ )			
Distribuição uniforme da fração de $\alpha = f - 1\%$ , em que $f$ é a fração máxima especificada de volume no domínio de projeto, e 1% é uma margem para garantir que a estimativa inicial vai estar dentro da restrição de volume.			
Esquema de otimização			
→ Passo 1: $f = 30\%$ , $q = 0,1$ $\kappa_{\text{mín}} = 0$ $\kappa_{\text{máx}} = 2,5 \cdot \mu \cdot 10^4 = 2,5 \cdot 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3 \text{ s})$ Número máximo de iterações: <u>20</u>		→ Passo 2: $q = 1,0$  Número máximo de iterações: <u>40</u>	
Parâmetros da configuração da malha após filtragem			
Variação de pressão ( $\Delta p$ )	$-1,368695 \times 10^{-2} \text{ Pa}$	Dissipação de energia ( $\Phi$ )	$2,773553 \times 10^{-6} \text{ W}$
Carga manométrica ( $H$ )	$-9,408790 \times 10^{-7} \text{ m}$	Vorticidade ( $\xi_v$ )	$2,472865 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}^2$

\* A saída é aberta para a atmosfera usando  $p = 0$  como referência de pressão.

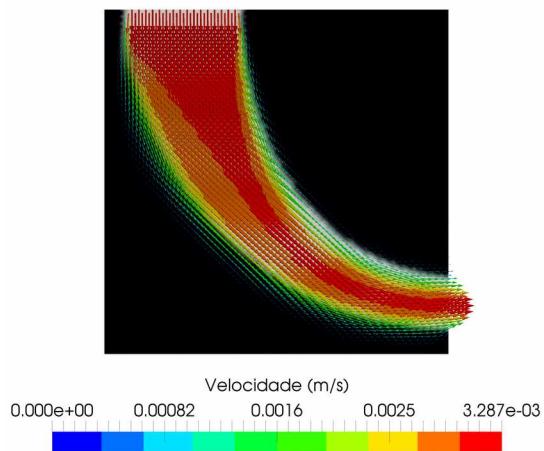
Pode-se observar que o resultado da figura 8.4.1b possui uma curva mais acentuada que o resultado de Borrrell e Petersson (2003, p. 156), que foi feito com fluido fictício, escoamento de Stokes e em malha 2D de coordenadas cartesianas sem axissimetria.

Nota-se que há um pico de pressão na esquerda da entrada devido à descontinuidade da borda interior da entrada (figura 8.4.1d). Calculando-se a pressão média na entrada, obtém-se que ela é negativa (tabela 8.4.1).

### **Verificação de passagem de fluido no resultado da otimização**

No resultado de otimização, não deve haver quantidade significativa de fluido passando por região de material sólido. Assim, deve ser verificada essa adequação em todas as otimizações. Na figura 8.4.2, está ilustrada a distribuição de vetores velocidade no resultado da otimização de canal axissimétrico. Como pode ser observado, o fluido passa praticamente todo pela região de fluido, o que mostra ser válido o resultado obtido na otimização topológica.

Figura 8.4.2 - Distribuição de vetores velocidade no resultado da otimização de canal axissimétrico



Fonte: Própria (imagem elaborada com a biblioteca `Matplotlib` de Python)

### **Verificação de cálculo de sensibilidade por diferenças finitas**

Para verificar a coerência do cálculo da sensibilidade (derivada) da função objetivo pelo `dolfin-adjoint` durante a otimização, implementou-se uma rotina de cálculo da sensibilidade da função objetivo pelo Método de Diferenças Finitas (MDF). Para comparar os dois cálculos de sensibilidade, foi selecionado o nó do meio da malha ( (250 mm, 150 mm) ) e utilizada diferença aproximada central de 1<sup>a</sup> ordem, cujo erro é de ordem  $O(\Delta\alpha_{\text{nó}}^2)$  :

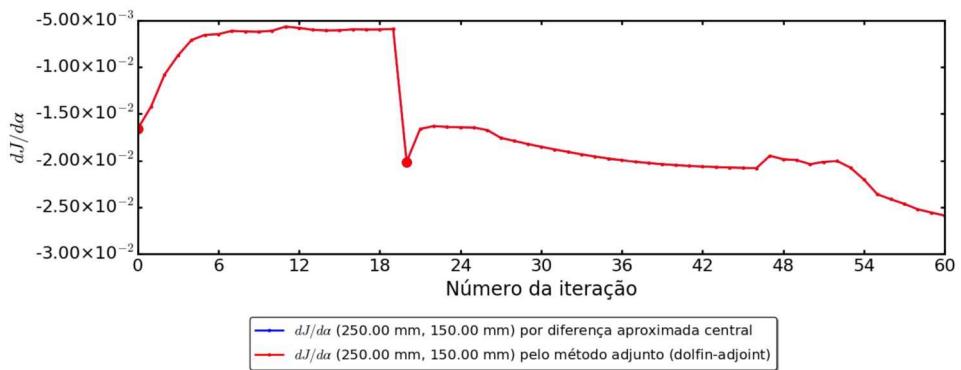
$$\frac{dJ}{d\alpha} \approx \frac{J(\alpha + \Delta\alpha_{\text{nó}}) - J(\alpha - \Delta\alpha_{\text{nó}})}{2 \cdot \Delta\alpha_{\text{nó}}} \quad (8.4.1)$$

O passo utilizado no cálculo aproximado ( $\Delta\alpha_{\text{nó}}$ ) foi imposto somente no nó de interesse, mantendo o resto do domínio sem alteração no valor de  $\alpha$ .

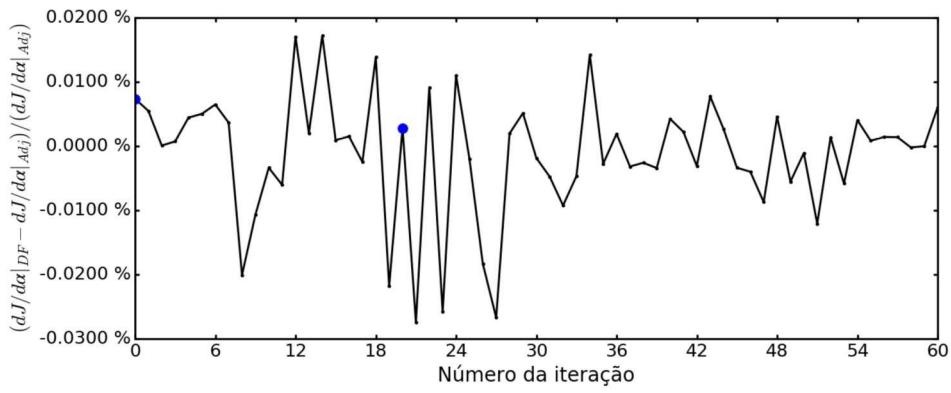
Na figura 8.4.3, pode ser vista a diferença relativa entre os dois valores de sensibilidade utilizando-se  $\Delta\alpha_{\text{nó}} = 10^{-8}$ .

Figura 8.4.3 - Comparação da sensibilidade pelo método adjunto calculada pelo `dolfin-adjoint` (“Adj”) e da sensibilidade pelo método de diferenças finitas (“DF”)

(a) Valores das sensibilidades em (250 mm, 150 mm) (\* As duas curvas ficaram sobrepostas)



(b) Diferença relativa das sensibilidades em (250 mm, 150 mm)



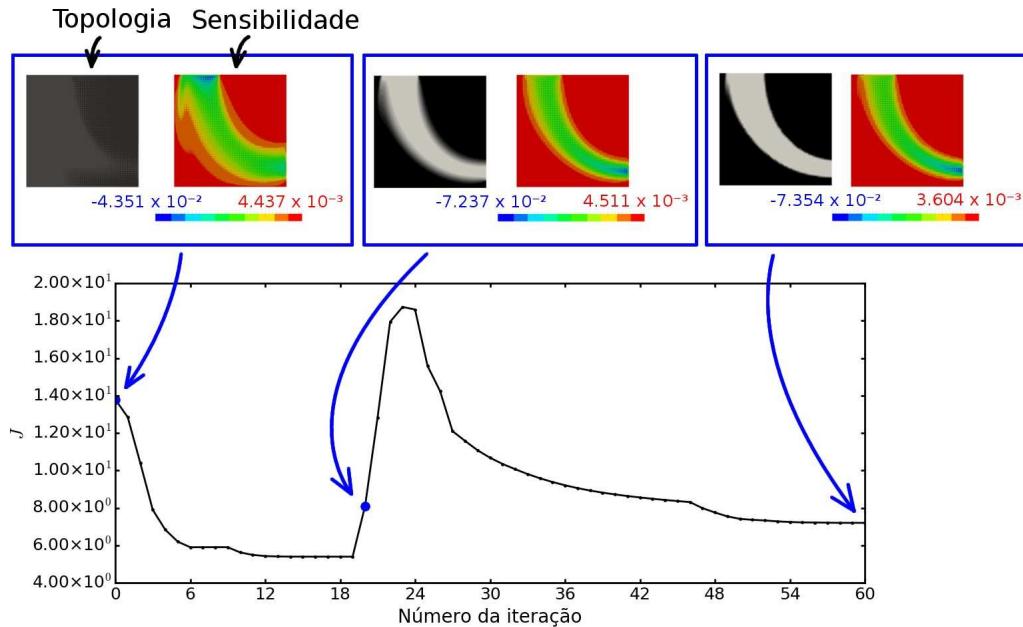
Fonte: Própria (imagem elaborada com a biblioteca Matplotlib de Python)

Como se pode observar acima, as duas sensibilidades estão coerentes, o que mostra a validade do cálculo da sensibilidade deste problema pelo método adjunto no `dolfin-adjoint`.

### Verificação de sensibilidade da função objetivo

A curva de convergência da otimização topológica do canal axissimétrico mostrando a evolução da distribuição de fluido e da sensibilidade está na figura 8.4.4.

Figura 8.4.4 - Curva de convergência para otimização topológica de canal axissimétrico para a função objetivo, mostrando a topologia (em escala de cinza) e sensibilidade (em escala de cores) em cada iteração (expressa em unidades do CGS)  
 (\* Cada círculo azul representa o início de um passo de otimização.)



Fonte: Própria (imagem elaborada com a biblioteca Matplotlib de Python e GIMP)

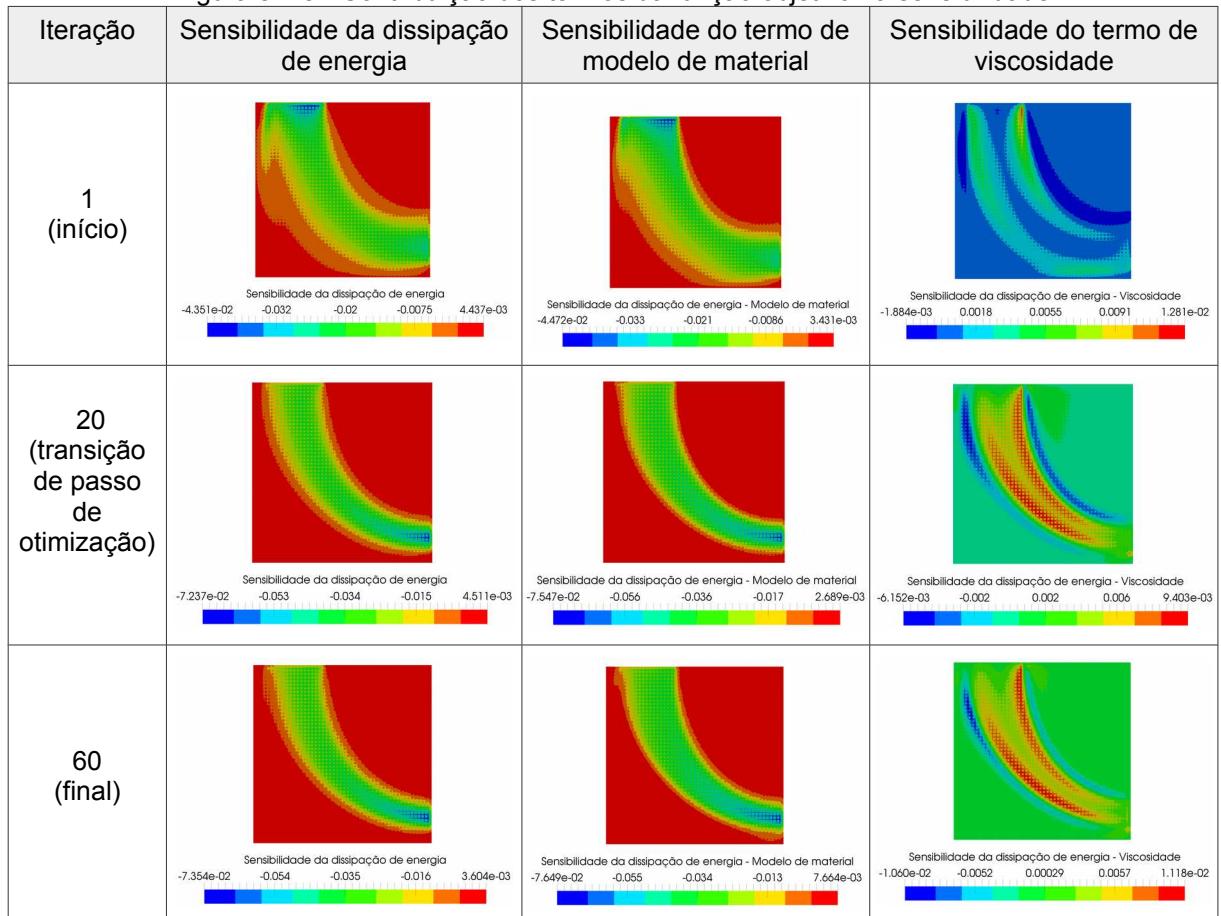
Como se pode observar na figura 8.4.4, o contorno geral do formato otimizado da distribuição de fluido pode ser visto diretamente no gráfico de sensibilidade inicial, que corresponde a uma maior influência do termo de viscosidade da dissipação de energia. Assim, os valores dos parâmetros do modelo de material no início da otimização devem estar suficientemente relaxados ( $\kappa_{\max}$  e  $q$  não muito elevados), mas não excessivamente, porque o termo de viscosidade da dissipação de energia depende do gradiente de velocidade, que é nulo no início da otimização. Após o início e controlando-se o aumento dos parâmetros do modelo de material, é possível

chegar na solução ótima para o problema sem incorrer em uma priorização excessiva do termo de modelo de material da dissipação de energia.

Cabe notar que a definição de um número máximo de iterações para cada passo da otimização pode influenciar no resultado final se uma transição for feita enquanto a distribuição de fluido e a sua densidade não se estabilizaram.

Na figura 8.4.5, pode ser vista a contribuição dos termos da função objetivo (dissipação de energia) na sensibilidade. Pode-se perceber que, no início da otimização, a sensibilidade devida ao termo de viscosidade possui participação significativa, mas que decresce com o decorrer da otimização (aumento dos parâmetros do modelo de material).

Figura 8.4.5 - Contribuição dos termos da função objetivo na sensibilidade

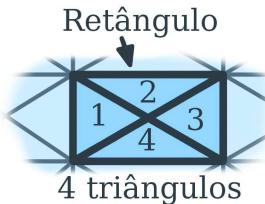


Fonte: Própria (imagens elaboradas com o ParaView)

## 8.5 OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA DO ROTOR DA BOMBA TESLA

Para otimização topológica do rotor da bomba Tesla, as malhas foram escolhidas como estruturadas, sendo compostas por partições retangulares de 4 triângulos cada (figura 8.5.1).

Figura 8.5.1 - “Elementos triangulares cruzados” - Partições retangulares de 4 triângulos a partir de suas diagonais.



Fonte: Própria (imagem elaborada com o GIMP)

O método de continuação utilizado para rotor de bomba Tesla de entrada vertical foi variando-se a viscosidade cinemática de 100,0 Pa.s até 0,001 Pa.s : 100,0 → 10,0 → 1,0 → 0,5 → 0,1 → 0,05 → 0,01 → 0,005 → 0,004 → 0,003 → 0,0025 → 0,002 → 0,0015 → 0,0012 → 0,0011 → 0,001. Não foi necessário usar método de continuação no caso do rotor de bomba Tesla de entrada horizontal.

Como forças de corpo como a da gravidade são normalmente menor do que as outras forças incluídas em uma máquina de fluxo, as forças de corpo não foram consideradas nas otimizações/simulações (i.e.,  $\rho \mathbf{f} = (0, 0, 0)$ ).

O meio poroso é assumido com a mesma rotação que o referencial rotativo, assim,  $\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}$ .

A função multiobjetivo é computada por meio do cálculo de cada um de seus termos separadamente e combinando (juntamente com os pesos adaptativos) antes de prover os valores de funcional e sensibilidade para o IPOPT. Como a biblioteca dolfin-adjoint não provê uma interface para implementação de função multiobjetivo, implementou-se uma interface de código similar à do dolfin-adjoint com essa funcionalidade.

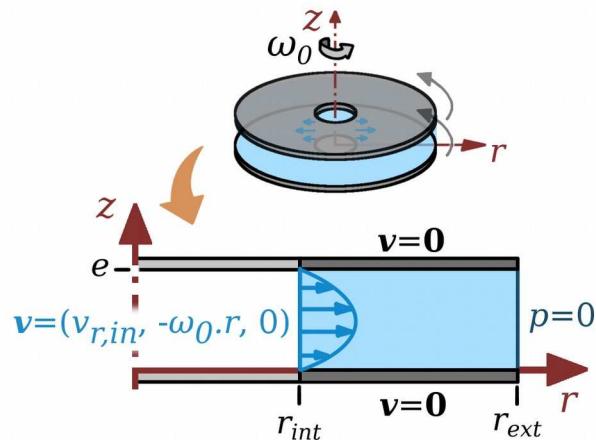
Os modelos de bomba Tesla podem ser descritos como canais rotativos. A seguir, o projeto de um rotor de bomba Tesla é analisado para uma entrada horizontal (para um canal), e uma entrada vertical (para um ou dois canais).

Os esquemas de otimização estão no “Apêndice D – Esquemas de otimização usados para o rotor da bomba Tesla”. Neles, a rotação, a vazão de entrada e os parâmetros de otimização foram escolhidos de tal forma que assegurassem convergência para uma topologia otimizada em cada caso.

### 8.5.1 Bomba Tesla de entrada horizontal

A bomba Tesla de entrada horizontal é composta basicamente de duas interfaces horizontais rotativas, uma entrada horizontal e uma saída horizontal (ver a figura 8.5.2).

Figura 8.5.2 - Modelo para otimização de uma bomba Tesla de entrada horizontal



Fonte: Própria (imagem elaborada com o GIMP)

A malha de elementos finitos foi escolhida com partições retangulares de elementos triangulares cruzados de 160 partições radiais e 40 partições axiais, totalizando 130.001 nós, 25.600 elementos e diâmetro máximo de elemento de  $6,25 \times 10^{-2}$  mm. Os parâmetros usados no projeto estão na tabela 8.5.1.

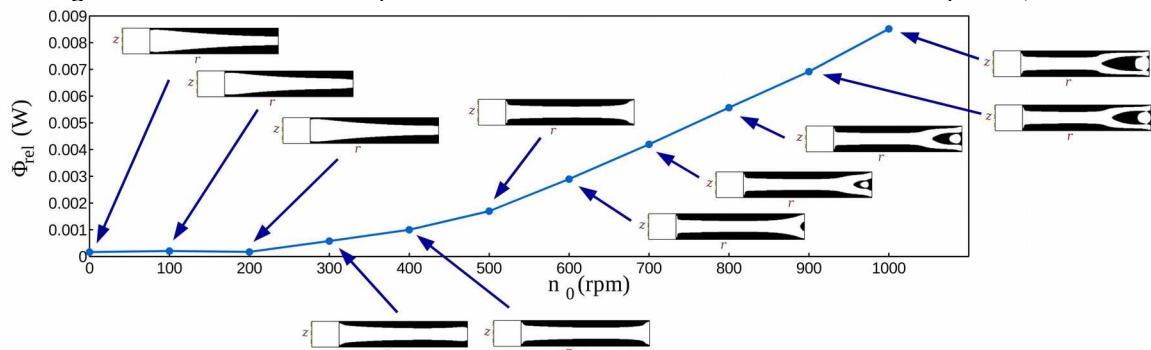
Tabela 8.5.1 - Parâmetros usados para otimização topológica de uma bomba Tesla de entrada horizontal

Parâmetros de entrada			
Pressão de saída	0 Pa *	Perfil de velocidade de entrada	Parabólico
Forças de corpo	$\rho f = (0, 0, 0)$ (sem forças de corpo)		
Dimensões			
$r_{\text{int}}$	5 mm	$r_{\text{ext}}$	15 mm
$e$	2 mm		

\* A saída é aberta para a atmosfera usando  $p = 0$  como referência de pressão.

O efeito da rotação na otimização da bomba Tesla de entrada horizontal é considerado para 0,5 L/min (permitindo 50% de fração de fluido), usando a estimativa inicial de 49% do domínio de projeto. A função objetivo é considerada como sendo somente a dissipação de energia. A figura 8.5.3 mostra a dissipação de energia para rotações variando de 0 rpm a 1000 rpm. Para esses casos,  $\kappa_{\theta,\text{máx}}$  é escolhido como sendo 100 vezes menor do que  $\kappa_{r,\text{máx}} = \kappa_{z,\text{máx}}$ , evitando o efeito de “bloqueio” da entrada quando  $\kappa_{r,\text{máx}} = \kappa_{\theta,\text{máx}} = \kappa_{z,\text{máx}}$  por volta de 300 rpm.

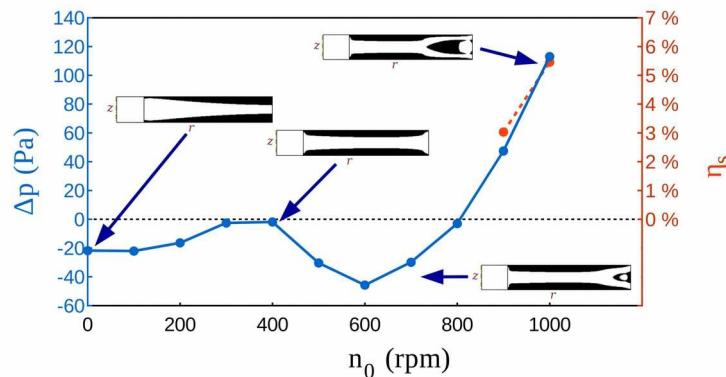
Figura 8.5.3 - Efeito da rotação em uma bomba Tesla de entrada horizontal para 0,5 L/min



Fonte: Própria (imagem elaborada com o LibreOffice Calc)

A variação de pressão e eficiência isentrópica para as topologias da figura 8.5.3 estão na figura 8.5.4. A topologia otimizada fornece uma variação de pressão positiva a partir de cerca de 800 rpm, o que significa que ele consegue operar como bomba a partir desse ponto.

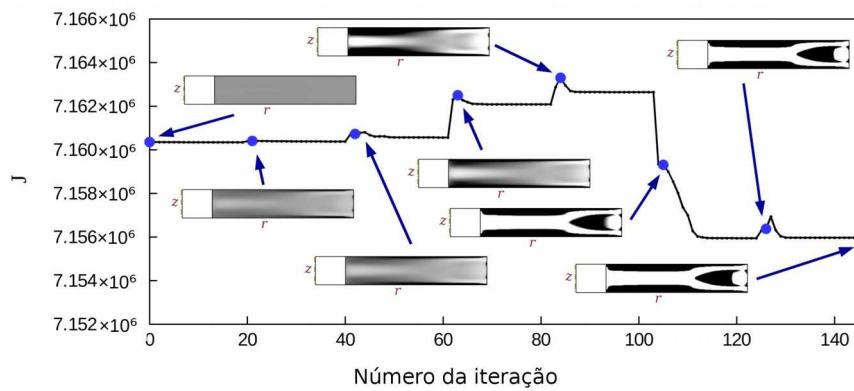
Figura 8.5.4 - Efeito da rotação na variação de pressão e eficiência isentrópica de uma bomba Tesla de entrada horizontal para 0,5 L/min



Fonte: Própria (imagem elaborada com LibreOffice Calc)

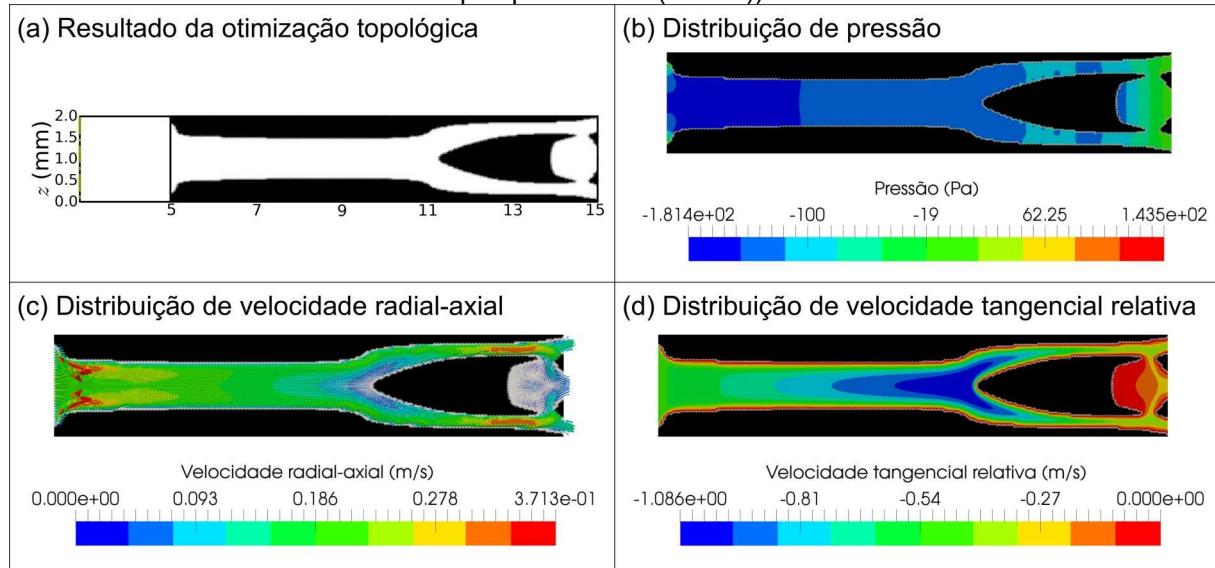
A figura 8.5.5 mostra a curva de convergência para 1000 rpm. A figura 8.5.6 mostra o resultado da otimização topológica e as distribuições de pressão/velocidade para a malha pós-processada (filtrada).

Figura 8.5.5 - Curva de convergência de uma bomba Tesla de entrada horizontal para 0,5 L/min e 1000 rpm (expressa em unidades do MMGS)  
(\* Cada círculo azul representa o início de um passo de otimização.)



Fonte: Própria (imagem elaborada com LibreOffice Calc)

Figura 8.5.6 - Resultado da otimização topológica de uma bomba Tesla de entrada horizontal para 1000 rpm e 0,5 L/min (\* A pressão e a velocidade são computadas na malha pós-processada (filtrada))



Fonte: Própria (imagens elaboradas com a biblioteca Matplotlib de Python e o ParaView)

A tabela 8.5.2 mostra os parâmetros da topologia otimizada da figura 8.5.4.

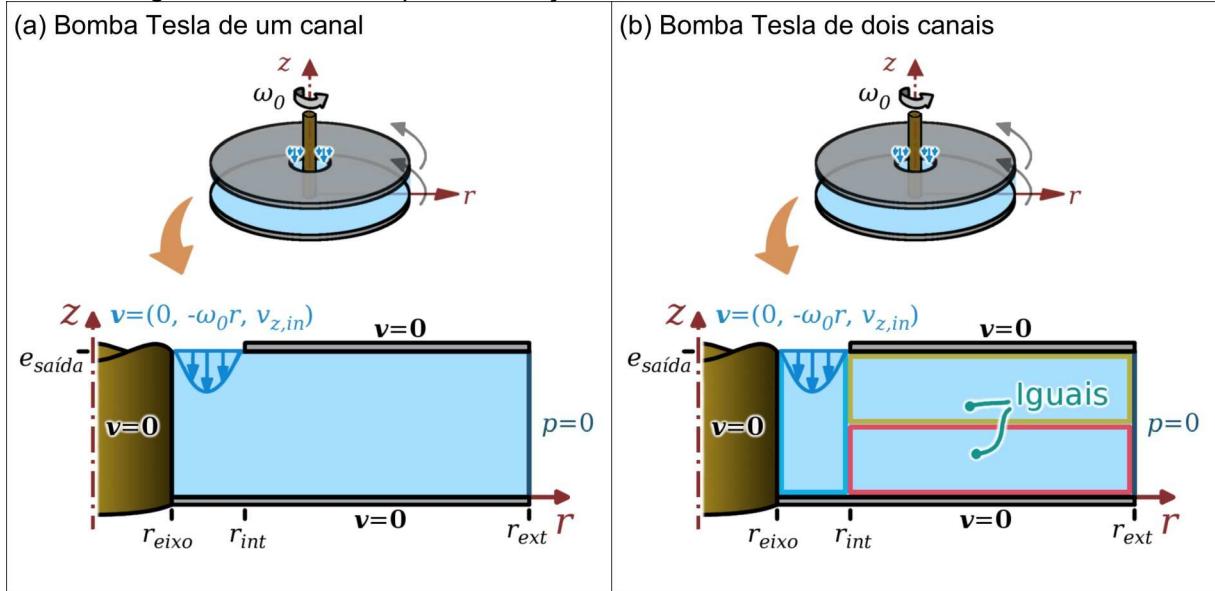
Tabela 8.5.2 - Parâmetros da topologia otimizada da bomba Tesla de entrada horizontal para 0,5 L/min e 1000 rpm

Parâmetros básicos		Funções de interesse	
Variação de pressão ( $\Delta p$ ) (Pa)	$1,1299 \times 10^2$	Dissipação de energia ( $\Phi_{rel}$ ) (W)	$8,5159 \times 10^{-3}$
Vazão volumétrica ( $Q$ ) (L/min)	0,5	Potência ( $P_f$ ) (W)	$1,6290 \times 10^{-2}$
Carga manométrica ( $H$ ) (m)	$1,0116 \times 10^{-1}$	Vorticidade ( $\xi_{V,rel}$ ) ( $m^2/s^2$ )	2,2167
Parâmetros adimensionais			
Camada limite	$Ph$	3,0700	
Regime de escoamento	$Re_{ext, \ell, max}$	$2,3565 \times 10^4$	
	$Nd_{ext, \ell, max}$	9,4260	
Vazão volumétrica	$A$	$1,0 \times 10^2$	
Eficiência	$\eta_s$	5,4562 %	

### 8.5.2 Bomba Tesla de entrada vertical

A bomba Tesla de entrada vertical é considerada para um e dois canais, conforme a figura 8.5.7.

Figura 8.5.7 - Modelos para otimização de uma bomba Tesla com entrada vertical



Fonte: Própria (imagens elaboradas com o GIMP)

A bomba Tesla de um canal (figura 8.5.7a) é composta de duas interfaces rotativas planas, uma interface de eixo rotativo, uma entrada vertical e uma saída horizontal.

A bomba Tesla de dois canais (figura 8.5.7b) é composta de repetição de padrão, de modo a forçar a formação de um disco no meio do domínio. Assim, o domínio de projeto fica dividido em três zonas, conforme ilustrado na figura 8.5.7b. As zonas bege e vermelha são zonas com o mesmo padrão imposto.

Para implementar repetição de padrão, o cálculo de sensibilidade provido pela biblioteca `dolfin-adjoint` para o IPOPT é alterado tal que, dentro de cada uma das zonas com repetição de padrão, o valor médio das sensibilidades de nós correspondentes é usado como a sensibilidade deles no IPOPT. Esse procedimento é similar ao usado por Almeida et al. (2010) em otimização estrutural.

Assim, para repetição de padrão entre duas zonas,

$$\left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\text{zona 1, para o IPOPT}} = \left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\text{zona 2, para o IPOPT}} = \frac{\left( \left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\text{zona 1, calculado}} + \left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\text{zona 2, calculado}} \right)}{2} \quad (8.5.1)$$

A malha de elementos finitos é a mesma para um e dois canais. Ela é inicialmente gerada a partir da fronteira de simetria axial até o raio externo  $r_{\text{ext}}$  (“malha de base”) e então o retângulo que corresponde ao eixo é cortado fora (“malha cortada”). A “malha de base” inclui 80 partições radiais e 40 partições axiais, enquanto que a “malha cortada” reduz o número de partições radiais para 66, totalizando 5.387 nós, 10.560 elementos e diâmetro máximo de elemento de  $1,875 \times 10^{-1}$  mm. Os parâmetros usados no projeto estão na tabela 8.5.3.

Tabela 8.5.3 - Parâmetros usados para otimização topológica de uma bomba Tesla de entrada vertical

Parâmetros de entrada			
Pressão de saída	0 Pa *	Perfil de velocidade de entrada	Parabólico
Forças de corpo	$\rho f = (0, 0, 0)$ (sem forças de corpo)		
Dimensões*			
$r_{\text{eixo}}$	2,6 mm	$r_{\text{int}}$	5 mm
$e_{\text{saída}}$	5 mm	$r_{\text{ext}}$	15 mm

\*\* A saída é aberta para a atmosfera usando  $p = 0$  como referência de pressão.

\*\* Na figura 8.5.7b, a altura de cada uma das duas zonas é  $e_{\text{saída}}/2$ .

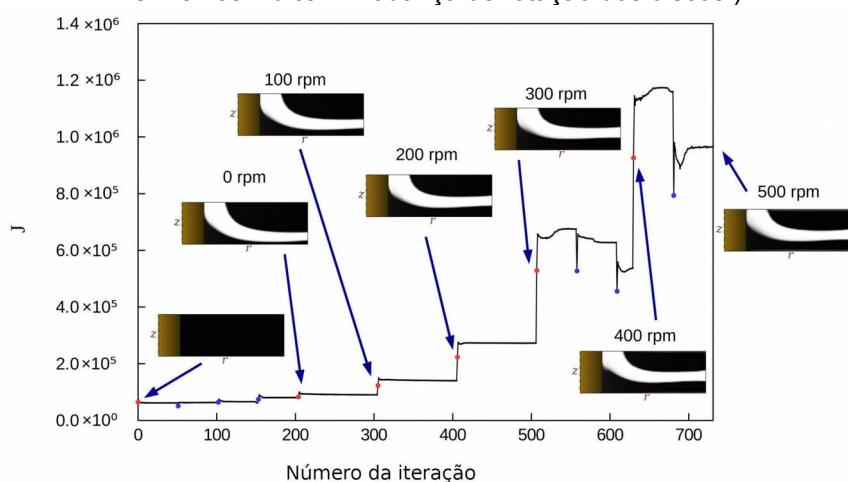
Diversos aspectos são considerados no projeto de uma bomba Tesla de entrada vertical. O efeito de um único disco estacionário na figura 8.5.7a foi também verificado, mas não se conseguiu convergir para uma topologia que resultasse em uma variação de pressão maior do que zero para uma rotação menor ou igual a 1000 rpm.

### 8.5.2.1 Otimizando para dissipação de energia

A bomba Tesla de um canal foi otimizada para uma rotação de 500 rpm e 0,5 L/min (permitindo 30% de fração de fluido), por meio de convergência gradual da sua topologia para rotações subsequentes crescentes, começando de 0 rpm. A curva de convergência está na figura 8.5.8, indicando as topologias intermediárias até chegar em 500 rpm após 593 iterações.

Figura 8.5.8 - Curva de convergência de uma bomba Tesla de um canal para 500 rpm e 0,5 L/min (expressa em unidades do MMGS)

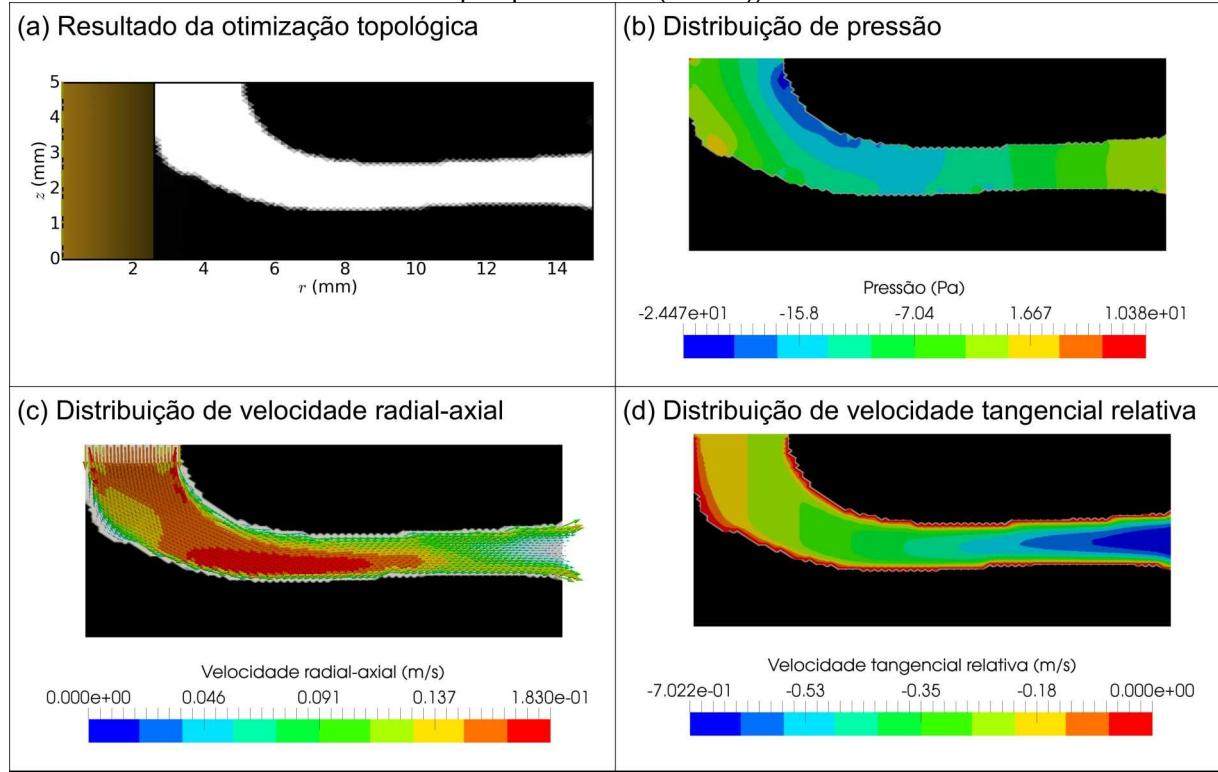
(\* Cada círculo azul representa o início de um passo de otimização. Os círculos vermelhos indicam mudança de rotação dos discos.)



Fonte: Própria (imagem elaborada com LibreOffice Calc)

A figura 8.5.9 mostra o resultado da otimização topológica e as distribuições de pressão/velocidade para a malha pós-processada (filtrada).

Figura 8.5.9 - Resultado da otimização topológica de uma bomba Tesla de um canal para 500 rpm e 0,5 L/min (\* A pressão e a velocidade são computadas na malha pós-processada (filtrada))



Fonte: Própria (imagens elaboradas com a biblioteca Matplotlib de Python e o ParaView)

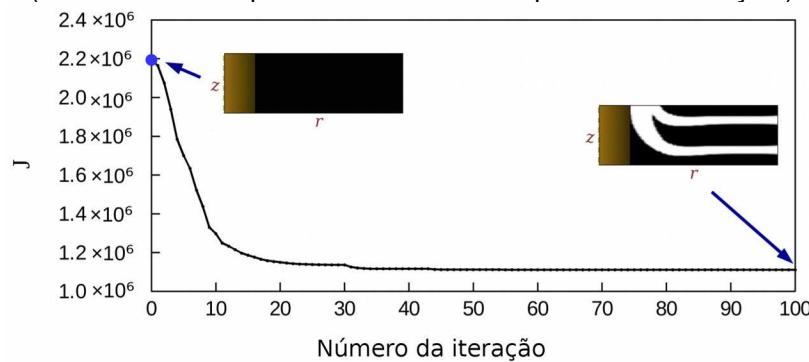
A tabela 8.5.4 mostra os parâmetros da topologia otimizada da figura 8.5.9.

Tabela 8.5.4 - Parâmetros da topologia otimizada da bomba Tesla de um canal para 0,5 L/min e 500 rpm

Parâmetros básicos		Funções de interesse	
Variação de pressão ( $\Delta p$ ) (Pa)	9,7183	Dissipação de energia ( $\Phi_{rel}$ ) (W)	$1,4543 \times 10^{-3}$
Vazão volumétrica ( $Q$ ) (L/min)	0.5	Potência ( $P_f$ ) (W)	$1,9899 \times 10^{-3}$
Carga manométrica ( $H$ ) (m)	$6,3909 \times 10^{-3}$	Vorticidade ( $\xi_{V,rel}$ ) ( $m^2/s^2$ )	$2,7943 \times 10^{-1}$
Parâmetros adimensionais			
Camada limite	$Ph$	8,6832	
Regime de escoamento	$Re_{ext, \ell, max}$	$1,1781 \times 10^4$	
	$Nd_{ext, \ell, max}$	$7,5398 \times 10^1$	
Vazão volumétrica	$A$	$4,0 \times 10^{-1}$	
Eficiência	$\eta_s$	4,1726 %	

A bomba Tesla de dois canais também foi otimizada para uma rotação de 500 rpm e 0,5 L/min (permitindo 30% de fração de fluido). A curva de convergência considerando somente dissipação de energia na função objetivo está na figura 8.5.10, com 100 iterações.

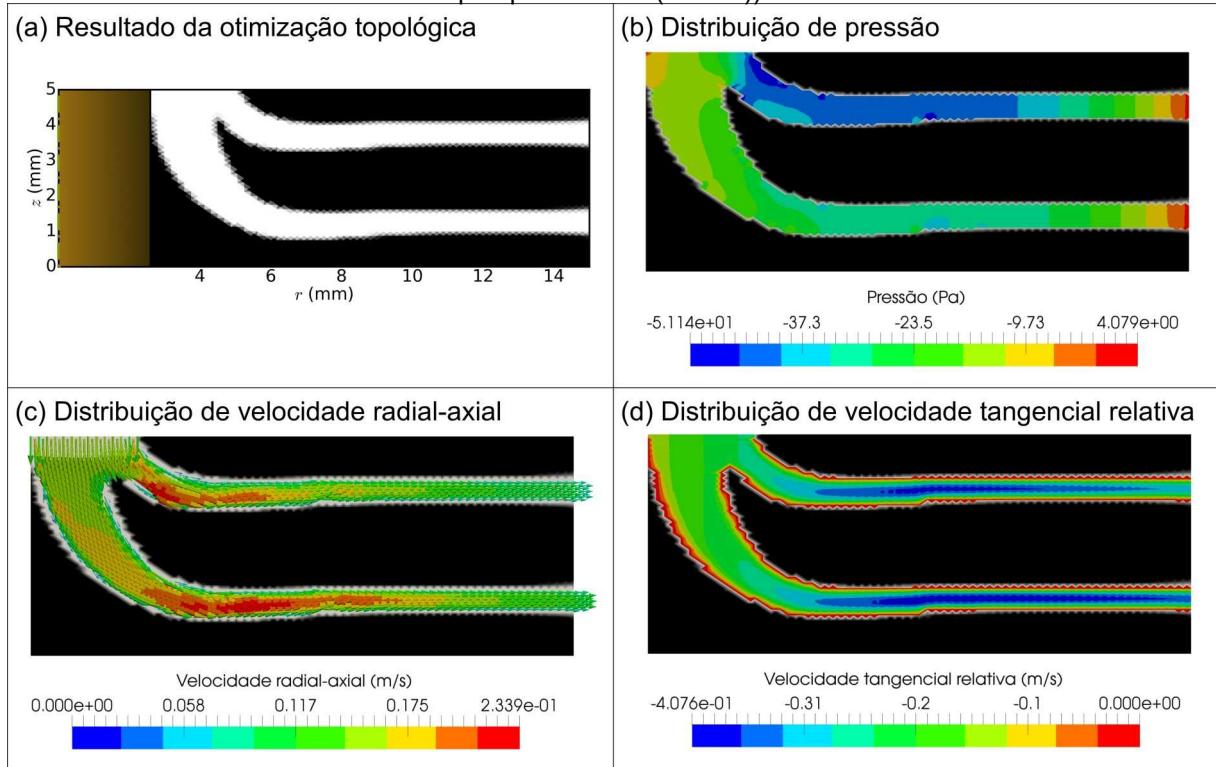
Figura 8.5.10 - Curva de convergência de uma bomba Tesla de dois canais para 500 rpm e 0,5 L/min (expressa em unidades do MMGS)  
(\* O círculo azul representa o início de um passo de otimização.)



Fonte: Própria (imagem elaborada com LibreOffice Calc)

A figura 8.5.11 mostra o resultado da otimização topológica e as distribuições de pressão/velocidade para a malha pós-processada (filtrada).

Figura 8.5.11 - Resultado da otimização topológica de uma bomba Tesla de dois canais para 500 rpm e 0,5 L/min (\* A pressão e a velocidade são computadas na malha pós-processada (filtrada))



Fonte: Própria (imagens elaboradas com a biblioteca Matplotlib de Python e o ParaView)

A tabela 8.5.5 mostra os parâmetros da topologia otimizada da figura 8.5.11.

Tabela 8.5.5 - Parâmetros da topologia otimizada da bomba Tesla de dois canais para 0,5 L/min e 500 rpm

Parâmetros básicos			Funções de interesse	
Variação de pressão ( $\Delta p$ ) (Pa)	$2,2119 \times 10^4$		Dissipação de energia ( $\Phi_{rel}$ ) (W)	$2,1859 \times 10^{-3}$
Vazão volumétrica ( $Q$ ) (L/min)	0,5		Potência ( $P_f$ ) (W)	$3,3351 \times 10^{-3}$
Carga manométrica ( $H$ ) (m)	$1,5121 \times 10^{-2}$		Vorticidade ( $\zeta_{V,rel}$ ) ( $m^2/s^2$ )	$5,4713 \times 10^{-1}$
Parâmetros adimensionais				
Camada limite	Ph	3,6180		
Regime de escoamento	$Re_{ext, \ell, max}$	$1,1781 \times 10^4$		
	$Nd_{ext, \ell, max}$	$1,3090 \times 10^4$		
Vazão volumétrica	A	$8,3334 \times 10^4$		
Eficiência	$\eta_s$	9,5470 %		

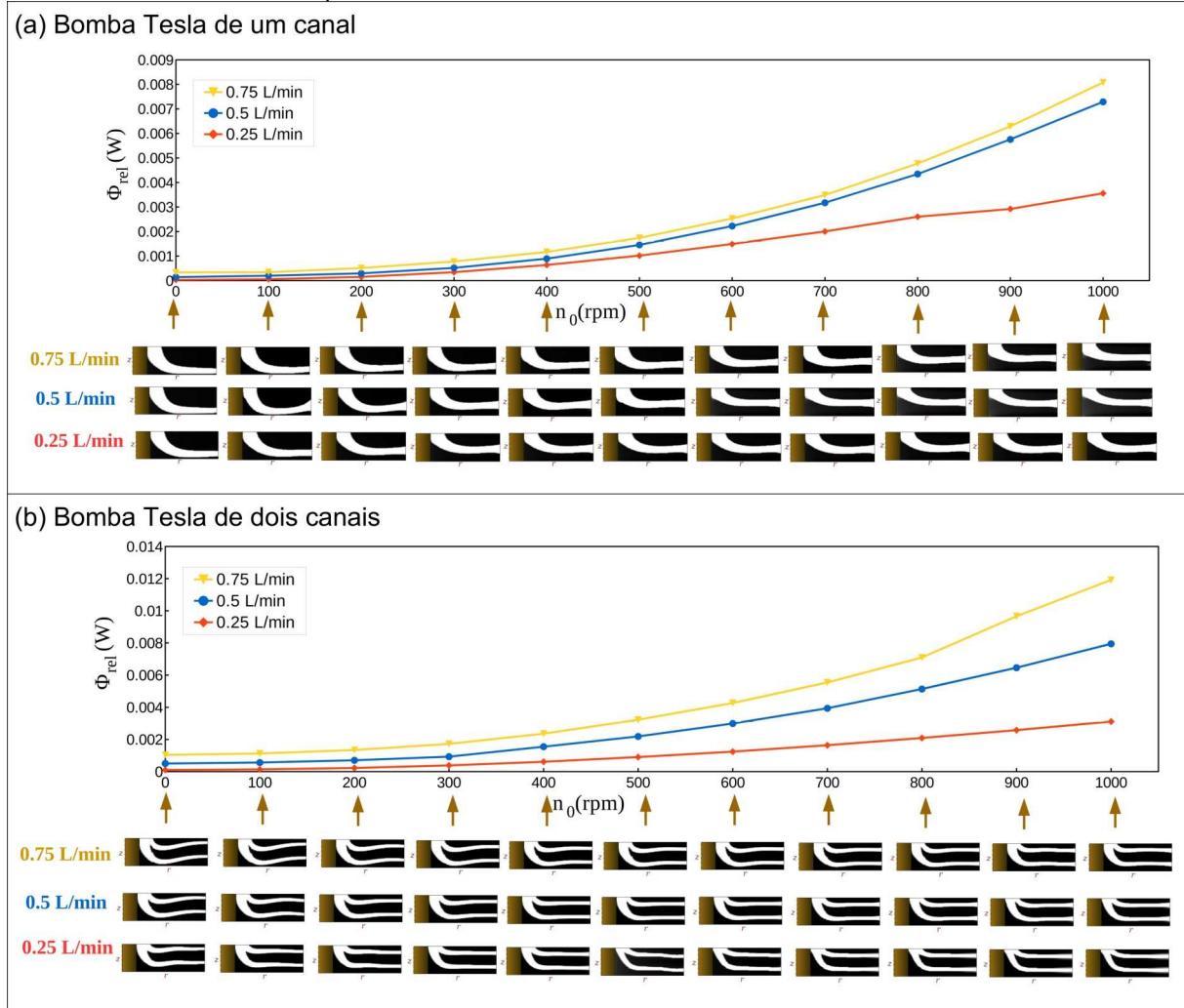
Comparando-se os parâmetros da bomba Tesla de um canal (tabela 8.5.4) e de uma bomba Tesla de dois canais (tabela 8.5.5), pode-se perceber que a

dissipação de energia é maior para dois canais. Porém a eficiência isentrópica é duas vezes maior para dois canais.

### 8.5.2.2 Efeito da rotação / vazão volumétrica

Considerando-se somente a dissipação de energia na função objetivo, o efeito da razão / vazão volumétrica na dissipação de energia para vazões volumétricas de 0,25 L/min, 0,5 L/min e 0,75 L/min estão na figura 8.5.12, de 0 rpm a 1000 rpm (permitindo 30 % de fração de fluido).

Figura 8.5.12 - Efeito da rotação / vazão volumétrica na dissipação de energia de bomba Tesla de entrada vertical para vazões volumétricas de 0,25 L/min, 0,5 L/min e 0,75 L/min

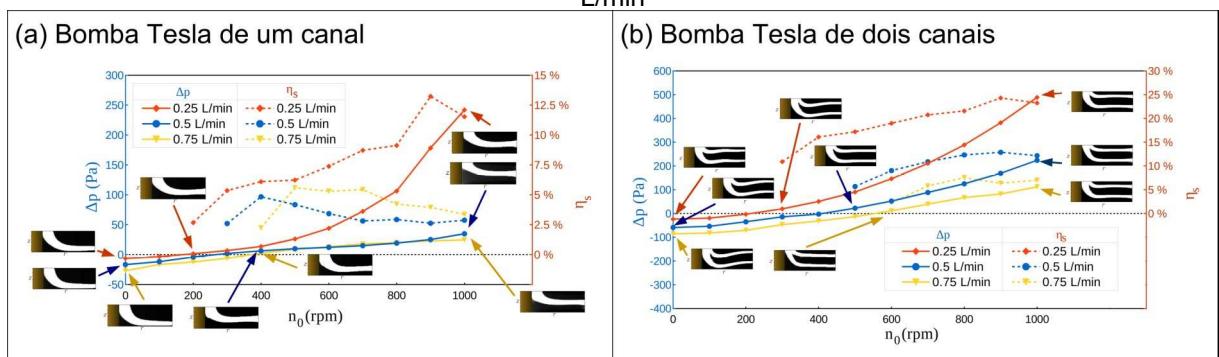


Fonte: Própria (imagens elaboradas com LibreOffice Calc)

Como pode ser visto na figura 8.5.12, a curva dissipação de energia sobe com vazão volumétrica crescente, sendo parabólica, mostrando o mesmo comportamento de perda de carga devida a atrito viscoso.

A variação de pressão e eficiência isentrópica para as topologias da figura 8.5.12 estão na figura 8.5.13.

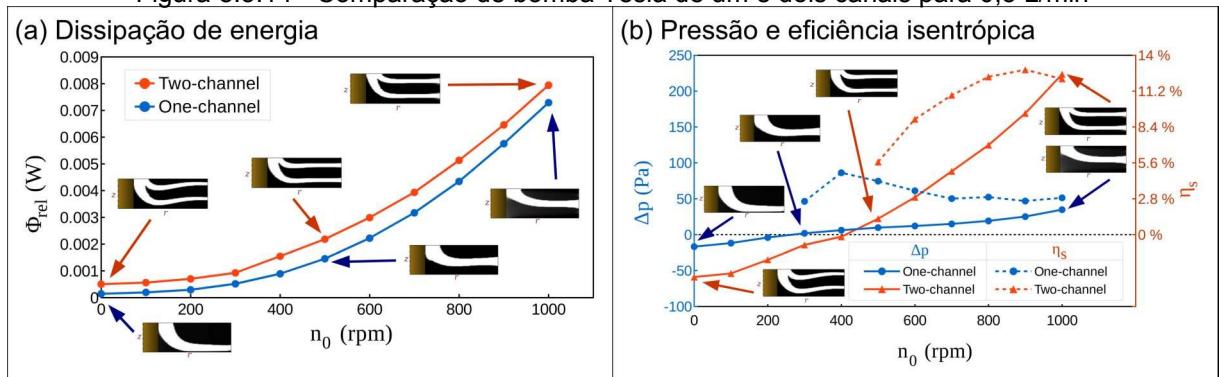
Figura 8.5.13 - Efeito da rotação / vazão volumétrica na variação de pressão e eficiência isentrópica de uma bomba Tesla de entrada vertical para vazões volumétricas de 0,25 L/min, 0,5 L/min e 0,75 L/min



Fonte: Própria (imagens elaboradas com LibreOffice Calc)

A figura 8.5.14 mostra a comparação de dissipação de energia, pressão e eficiência isentrópica para bomba Tesla de um e dois canais, para o caso de uma vazão volumétrica de 0,5 L/min, de 0 rpm para 1000 rpm (permitindo 30 % de fração de fluido).

Figura 8.5.14 - Comparação de bomba Tesla de um e dois canais para 0,5 L/min



Fonte: Própria (imagens elaboradas com LibreOffice Calc)

Como pode ser visto na figura 8.5.14b, para uma variação de pressão maior do que zero, somente as topologias otimizadas com rotação maior do que

aproximadamente 300 rpm (para um canal) e 400 rpm (para dois canais) operam efetivamente como bombas.

### 8.5.2.3 Efeito da razão de aspecto

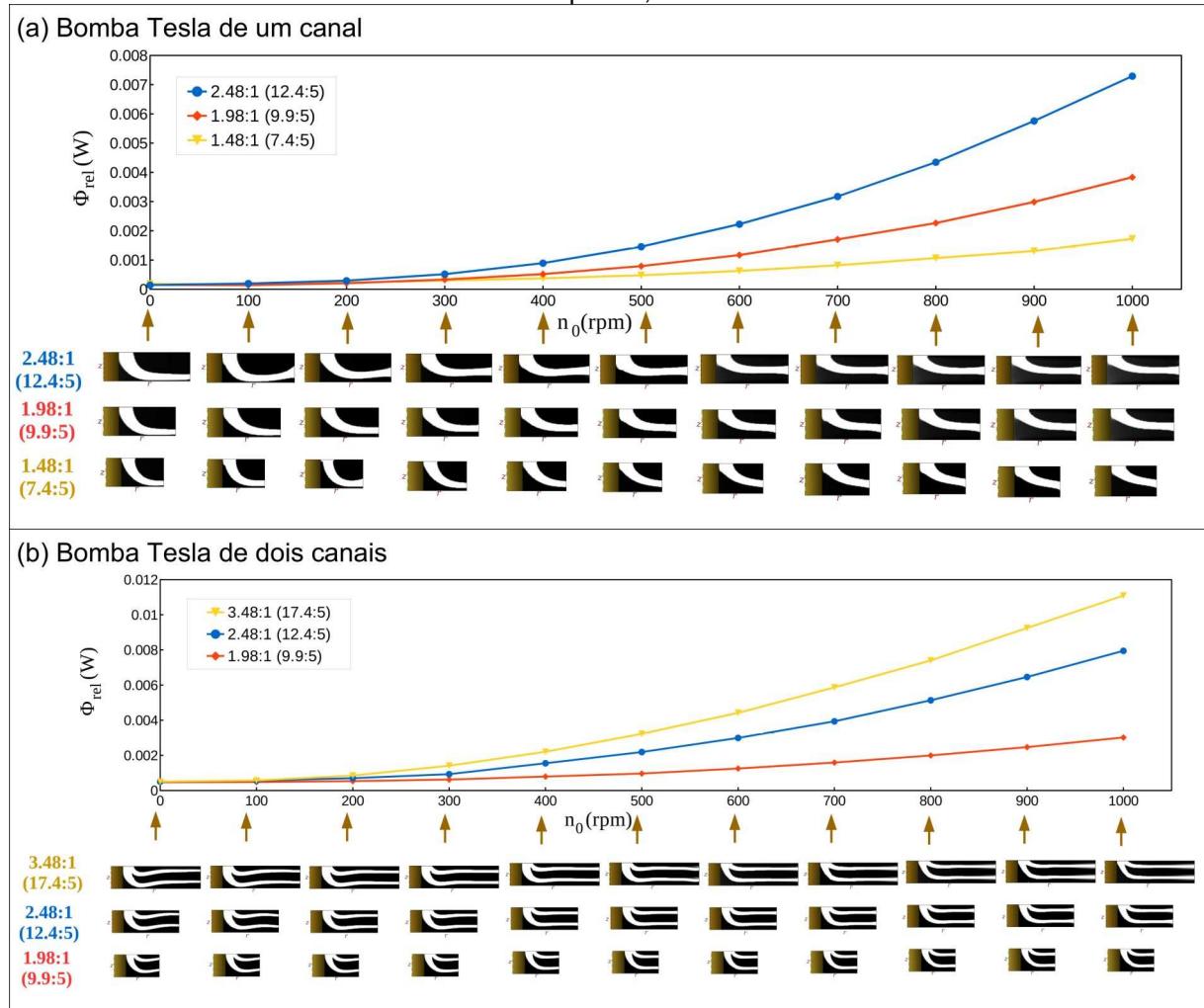
O efeito da razão de aspecto é considerado como  $(r_{ext} - r_{eixo}) : e_{saída}$ , para diferentes raios externos ( $r_{ext}$ ). As razões de aspecto são mostradas na tabela 8.5.6.

Tabela 8.5.6 - Razões de aspecto e malhas

$r_{ext}$ (mm)	Razão de aspecto	Malha de elementos finitos	
10	1,48 : 1 $((10 - 2,6) : 5 = 7,4 : 5)$	Partições retangulares de elementos triangulares cruzados, sendo 59 radiais e 40 axiais	4.820 nós 9.440 elementos Máximo diâmetro de elemento: $1,5625 \times 10^{-1}$ mm
12.5	1,98 : 1 $((12,5 - 2,6) : 5 = 9,9 : 5)$	Partições retangulares de elementos triangulares cruzados, sendo 63 radiais e 40 axiais	5.144 nós 10.080 elementos Máximo diâmetro de elemento: $1,5625 \times 10^{-1}$ mm
15	2,48 : 1 $((15 - 2,6) : 5 = 12,4 : 5)$	Partições retangulares de elementos triangulares cruzados, sendo 66 radiais e 40 axiais	5.387 nós 10.560 elementos Máximo diâmetro de elemento: $1,875 \times 10^{-1}$ mm
20	3,48 : 1 $((20 - 2,6) : 5 = 17,4 : 5)$	Partições retangulares de elementos triangulares cruzados, sendo 139 radiais e 40 axiais	11.300 nós 22.240 elementos Máximo diâmetro de elemento: $1,25 \times 10^{-1}$ mm

Considerando somente dissipação de energia na função objetivo, o efeito da razão de aspecto está na figura 8.5.15, de 0 rpm a 1000 rpm (permitindo 30 % de fração de fluido).

Figura 8.5.15 - Efeito da razão de aspecto na dissipação de energia de bomba Tesla de entrada vertical para 0,5 L/min

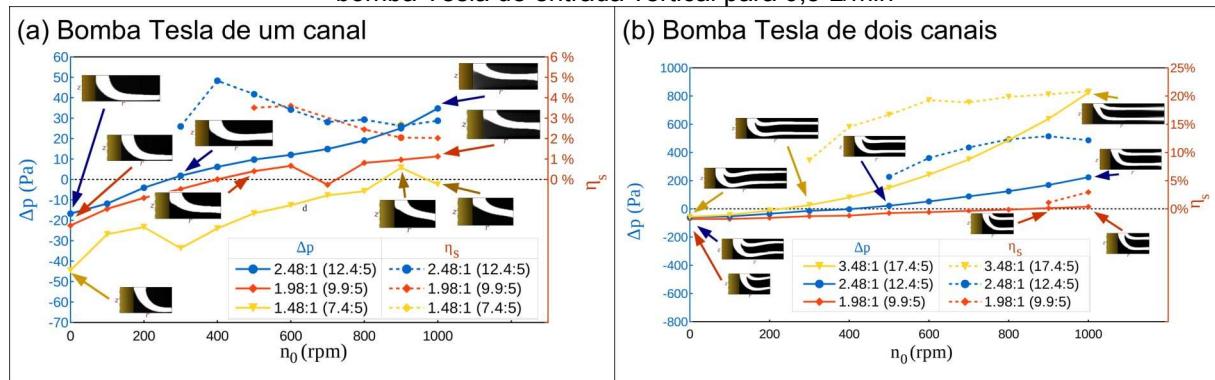


Fonte: Própria (imagens elaboradas com LibreOffice Calc)

Como se pode perceber acima, os formatos das curvas são similares ao efeito da rotação / vazão volumétrica na dissipação de energia.

A variação de pressão e eficiência isentrópica para as topologias da figura 8.5.15 estão na figura 8.5.16.

Figura 8.5.16 - Efeito da razão de aspecto na variação de pressão e eficiência isentrópica de uma bomba Tesla de entrada vertical para 0,5 L/min

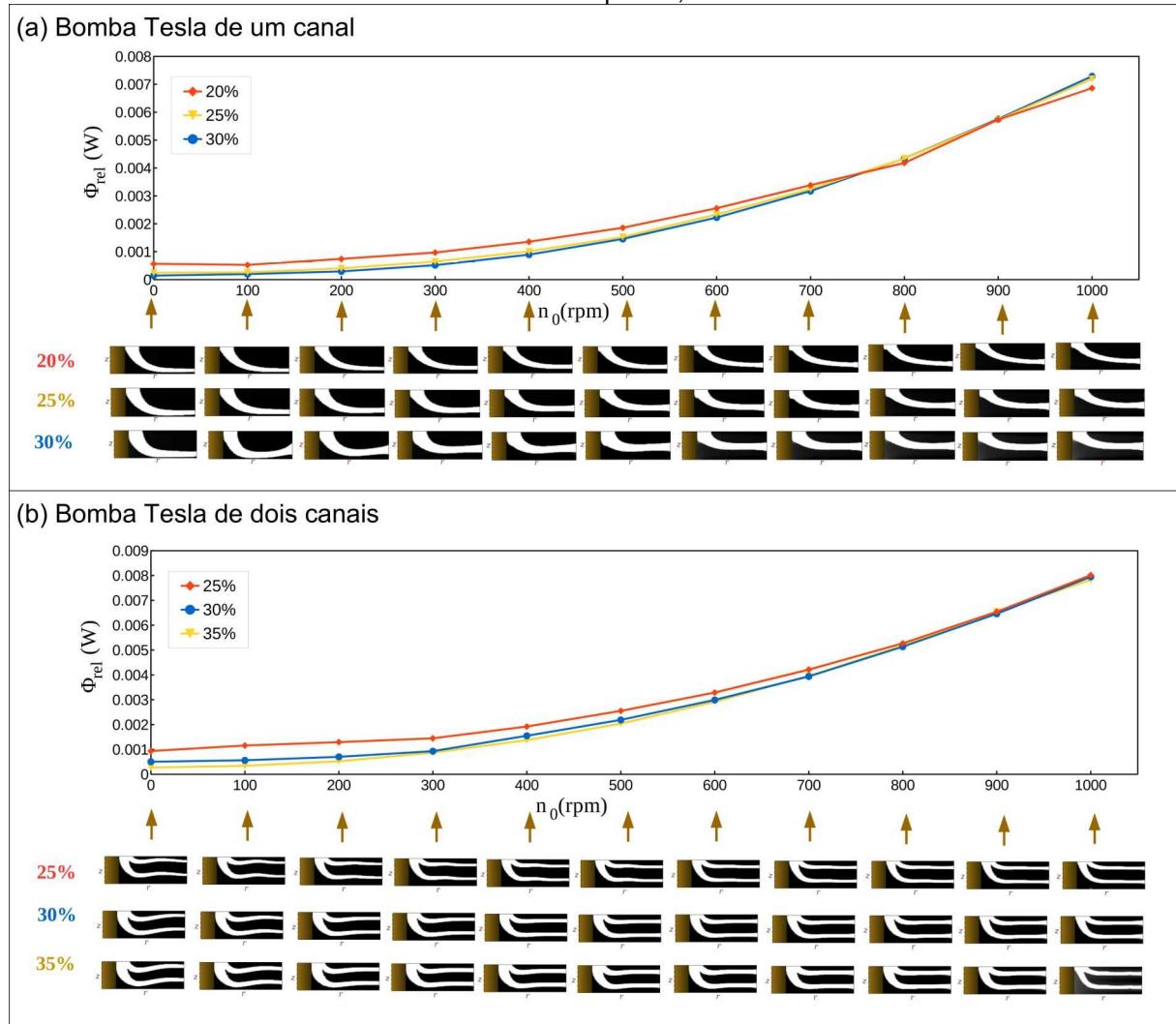


Fonte: Própria (imagens elaboradas com LibreOffice Calc)

#### 8.5.2.4 Efeito da fração de fluido permitida

Considerando-se somente a dissipação de energia na função objetivo, o efeito da fração (volumétrica) de fluido permitida está na figura 8.5.17, para 0,5 L/min e rotação de 0 rpm a 1000 rpm.

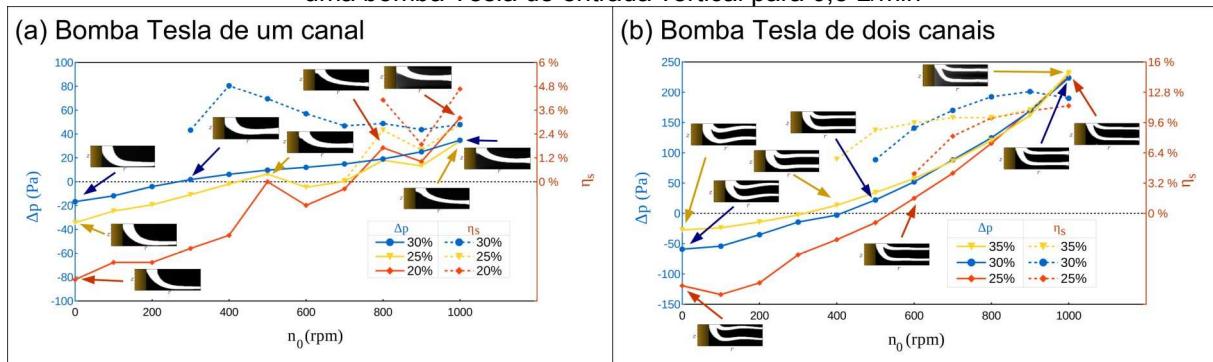
Figura 8.5.17 - Efeito da fração de fluido permitida na dissipação de energia de bomba Tesla de entrada vertical para 0,5 L/min



Fonte: Própria (imagens elaboradas com LibreOffice Calc)

A variação de pressão e eficiência isentrópica para as topologias da figura 8.5.17 estão na figura 8.5.18.

Figura 8.5.18 - Efeito da fração de fluido permitida na variação de pressão e eficiência isentrópica de uma bomba Tesla de entrada vertical para 0,5 L/min



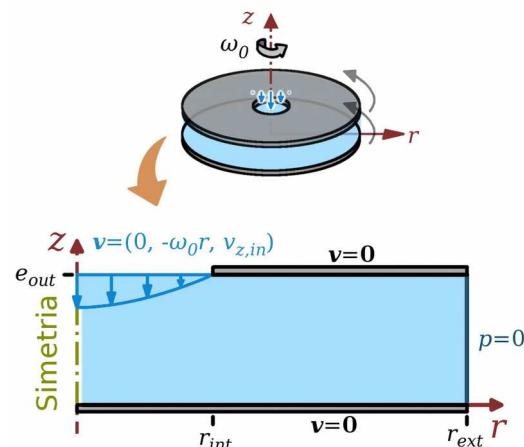
Fonte: Própria (imagens elaboradas com LibreOffice Calc)

### 8.5.2.5 Efeito do eixo

Considerando-se somente a dissipação de energia na função objetivo, o objetivo é analisado para uma situação sem um eixo (ver a figura 8.5.19) e está na figura 8.5.20, para uma vazão volumétrica de 0,5 L/min e rotação de 0 rpm a 1000 rpm (permitindo 30 % de fração de fluido).

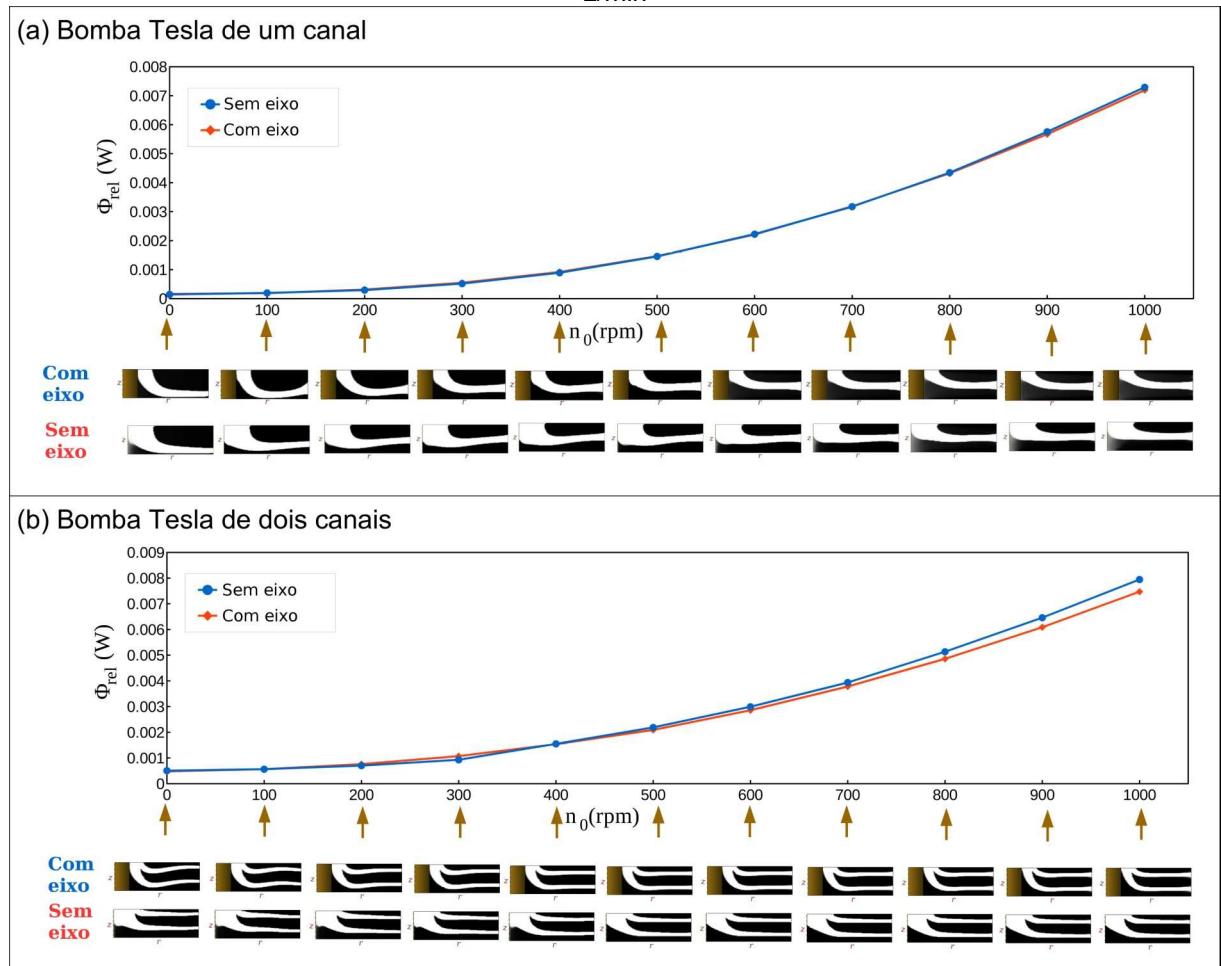
A malha de elementos finitos é gerada a partir da fronteira de simetria axial até o raio externo  $r_{ext}$ , totalizando 7.331 nós, 14.400 elementos e diâmetro máximo de elemento de  $1,667 \times 10^{-1}$  mm.

Figura 8.5.19 - Efeito da fração de fluido permitida na variação de pressão e eficiência isentrópica de uma bomba Tesla de entrada vertical para 0,5 L/min



Fonte: Própria (imagem elaborada com o GIMP)

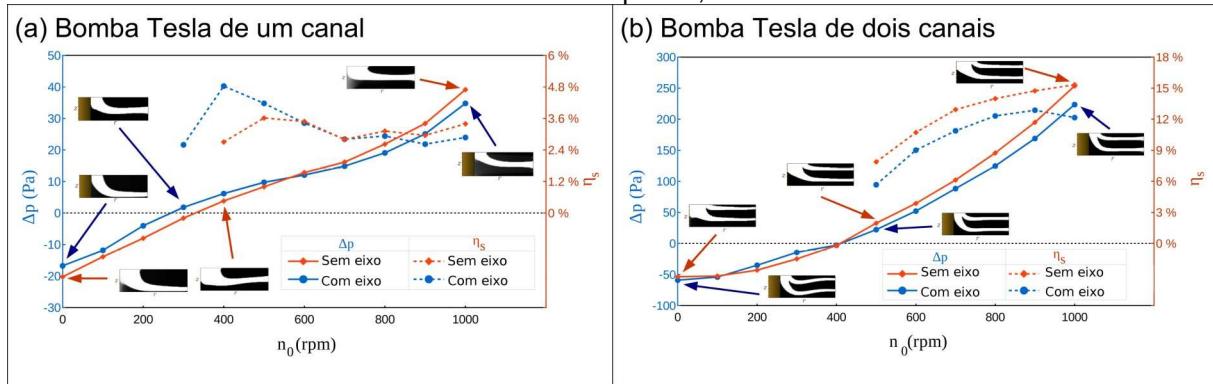
Figura 8.5.20 - Efeito do eixo na dissipação de energia de bomba Tesla de entrada vertical para 0,5 L/min



Fonte: Própria (imagens elaboradas com LibreOffice Calc)

A variação de pressão e eficiência isentrópica para as topologias da figura 8.5.20 estão na figura 8.5.21.

Figura 8.5.21 - Efeito do eixo na variação de pressão e eficiência isentrópica de uma bomba Tesla de entrada vertical para 0,5 L/min



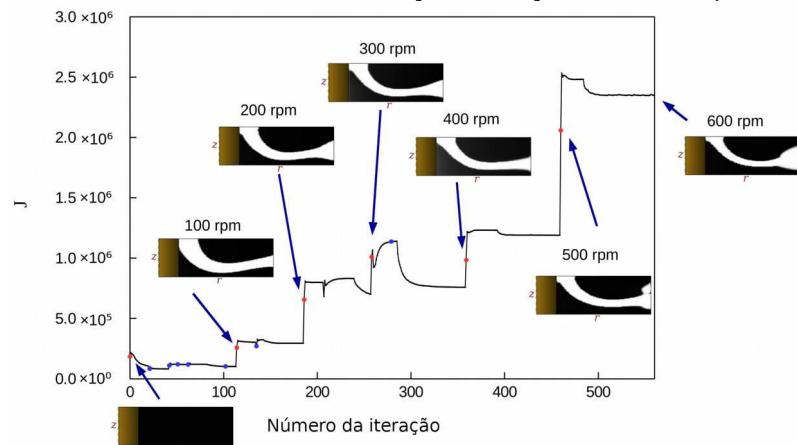
Fonte: Própria (imagens elaboradas com LibreOffice Calc)

Portanto, a partir da figuras 8.5.20 e 8.5.21, o efeito do eixo analisado é relativamente pequeno até 1000 rpm, mas, em rotações mais elevadas, a bomba Tesla sem eixo passa a apresentar dissipações de energia menores e variações de pressão maiores.

#### 8.5.2.6 Otimizando para potência

A bomba Tesla de um canal foi otimizada para uma função multiobjetivo com 20% de potência ( $w_p = 0,2$ ) e 80% de dissipação de energia ( $w_\Phi = 0,8$ ), para uma rotação de 500 rpm e 0,5 L/min (permitindo 30% de fração de fluido), por meio de convergência gradual da sua topologia para rotações subsequentes crescentes, começando de 0 rpm. A curva de convergência está na figura 8.5.22. Para esta otimização, o algoritmo de busca em linha do IPOPT foi desabilitado (“accept\_every\_trial\_step = yes”) para permitir que o algoritmo desse passos mais agressivos em direção à topologia otimizada.

Figura 8.5.22 - Curva de convergência para otimização com potência de uma bomba Tesla de um canal para 600 rpm e 0,5 L/min (expressa em unidades do MMGS)  
 (\* Cada círculo azul representa o início de um passo de otimização. Os círculos vermelhos indicam mudança de rotação dos discos.)

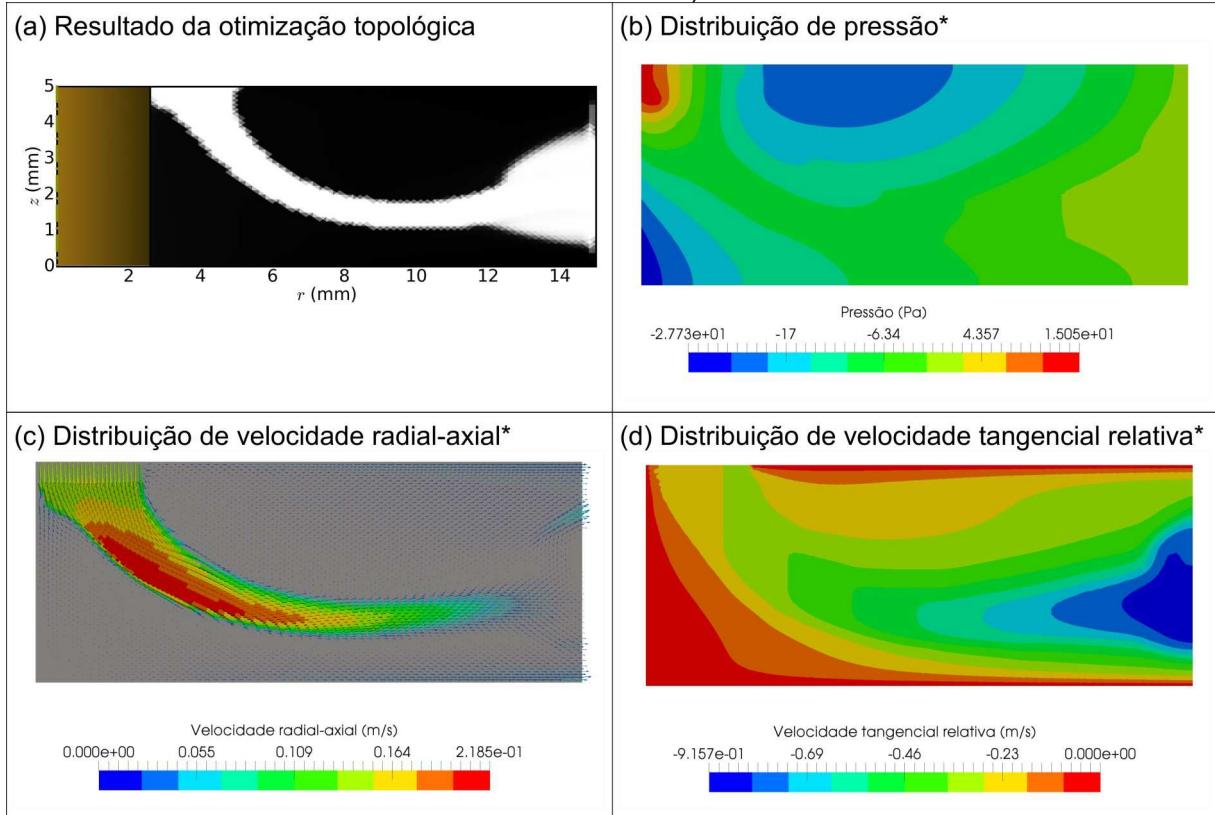


Fonte: Própria (imagem elaborada com LibreOffice Calc)

Pela figura 8.5.22, percebe-se que o efeito do termo de potência foi o de abrir a saída, deixando um estrangulamento no canal até ela.

A figura 8.5.23 mostra o resultado da otimização topológica e as distribuições de pressão/velocidade para a malha pós-processada (filtrada).

Figura 8.5.23 - Resultado da otimização topológica para potência de uma bomba Tesla de um canal para 600 rpm e 0,5 L/min (\* A pressão e a velocidade são computadas na malha como otimizada, sem pós-processamento, porque a otimização acabou gerando alguns poucos elementos isolados na malha. Para evitar esse problema, pode ser escolhido outro filtro para a topologia otimizada ou utilizar um esquema de projeção (ALMEIDA et al., 2010), que define uma espessura mínima para o canal de fluido)



Fonte: Própria (imagens elaboradas com a biblioteca Matplotlib de Python e o ParaView)

A tabela 8.5.7 mostra os parâmetros da topologia otimizada da figura 8.5.23.

Tabela 8.5.7 - Parâmetros da topologia otimizada da bomba Tesla de um canal para 0,5 L/min e 600 rpm (\* Neste caso, os parâmetros foram computados na malha como otimizada, sem pós-processamento mas sem a inclusão do modelo de material nos cálculos das funções)

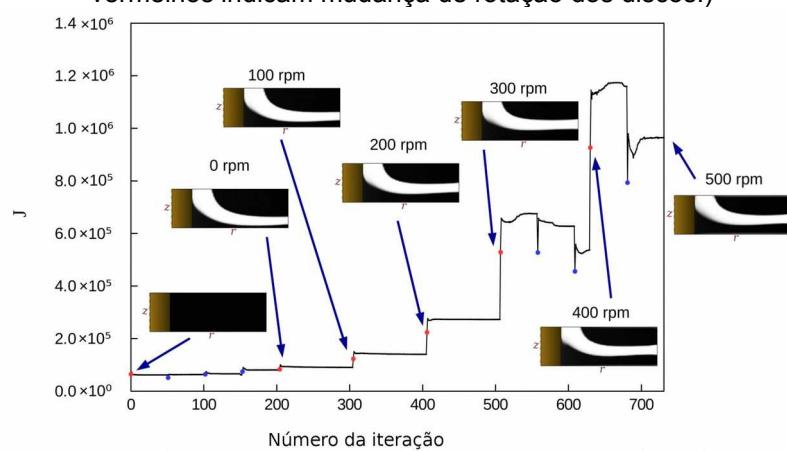
Parâmetros básicos*		Funções de interesse*	
Variação de pressão ( $\Delta p$ ) (Pa)	3,7897	Dissipação de energia ( $\Phi_{rel}$ ) (W)	$5,7121 \times 10^{-4}$
Vazão volumétrica ( $Q$ ) (L/min)	0,5	Potência ( $P_f$ ) (W)	$3,3974 \times 10^{-3}$
Carga manométrica ( $H$ ) (m)	$1,2433 \times 10^{-2}$	Vorticidade ( $\zeta_{V,rel}$ ) ( $m^2/s^2$ )	$1,5548 \times 10^{-1}$
Parâmetros adimensionais*			
Camada limite	Ph	6,3413	
Regime de escoamento	$Re_{ext, \ell, max}$	$1,4138 \times 10^4$	
	$Nd_{ext, \ell, max}$	$4,0213 \times 10^1$	
Vazão volumétrica	A	$2,6667 \times 10^2$	
Eficiência	$\eta_s$	0,9304 %	

### 8.5.2.7 Otimizando para vorticidade

A bomba Tesla de um canal foi otimizada para uma função multiobjetivo com 20% de vorticidade ( $w_V = 0,2$ ) e 80% de dissipação de energia ( $w_\Phi = 0,8$ ) para uma rotação de 500 rpm e 0,5 L/min (permitindo 30% de fração de fluido), por meio de convergência gradual da sua topologia para rotações subsequentes crescentes, começando de 0 rpm. A constante de proporcionalidade foi escolhida como

$k_V = 10^{-2}$ . A curva de convergência está na figura 8.5.24, indicando as topologias intermediárias até chegar em 500 rpm após 731 iterações. Para esta otimização, o algoritmo de busca em linha do IPOPT foi desabilitado (“accept\_every\_trial\_step = yes”) para permitir que o algoritmo desse passos mais agressivos em direção à topologia otimizada.

Figura 8.5.24 - Curva de convergência para otimização com vorticidade de uma bomba Tesla de dois canais para 500 rpm e 0,5 L/min (expressa em unidades do MMGS)  
 (\* Cada círculo azul representa o início de um passo de otimização. Os círculos vermelhos indicam mudança de rotação dos discos.)

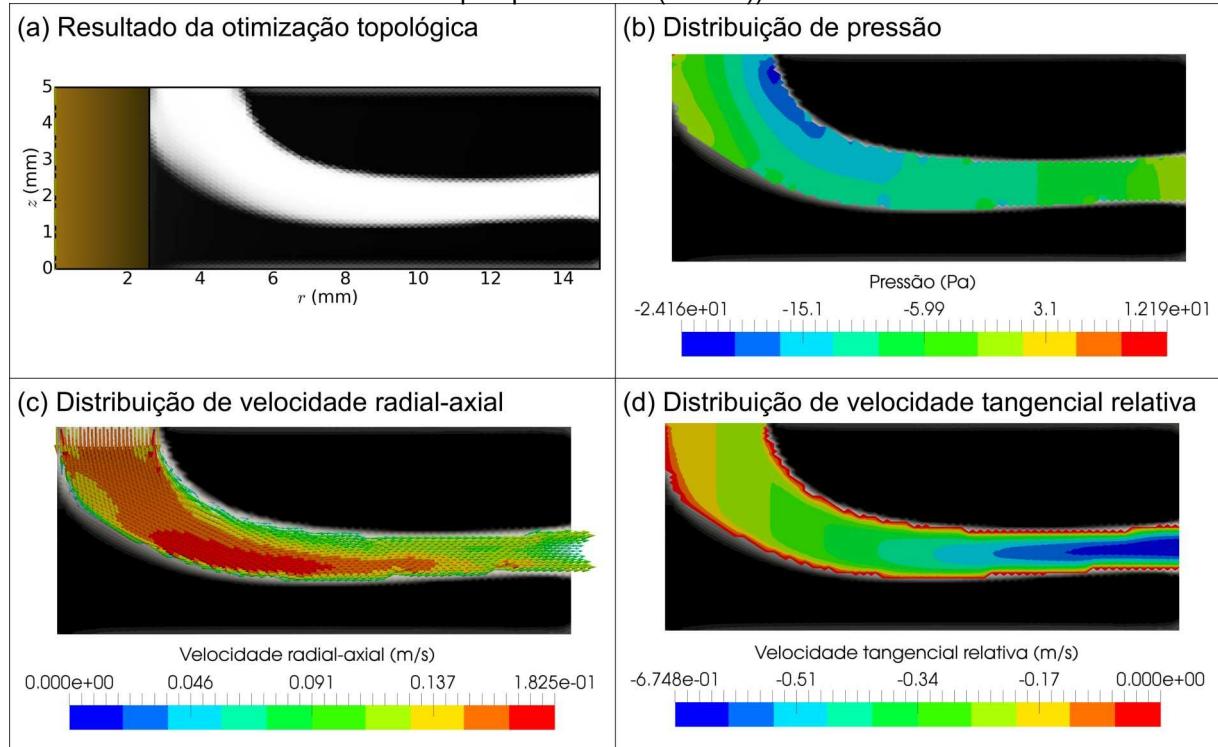


Fonte: Própria (imagem elaborada com LibreOffice Calc)

Pela figura 8.5.24, percebe-se que o efeito do termo de vorticidade foi o de suavizar o canal.

A figura 8.5.25 mostra o resultado da otimização topológica e as distribuições de pressão/velocidade para a malha pós-processada (filtrada).

Figura 8.5.25 - Resultado da otimização topológica para vorticidade de uma bomba Tesla de dois canais para 500 rpm e 0,5 L/min (\* A pressão e a velocidade são computadas na malha pós-processada (filtrada))



Fonte: Própria (imagens elaboradas com a biblioteca Matplotlib de Python e o ParaView)

A tabela 8.5.8 mostra os parâmetros da topologia otimizada da figura 8.5.25.

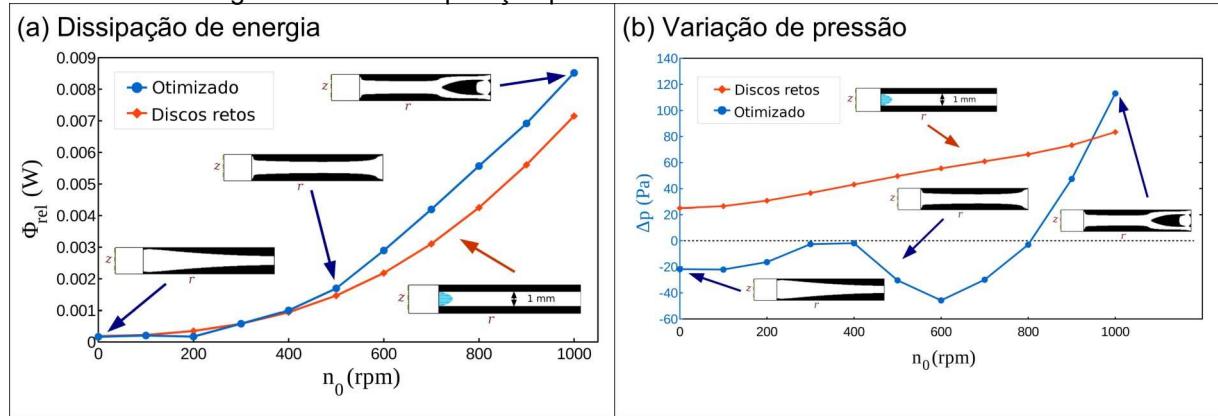
Tabela 8.5.8 - Parâmetros da topologia otimizada da bomba Tesla de dois canais para 0,5 L/min e 500 rpm

Parâmetros básicos			Funções de interesse	
Variação de pressão ( $\Delta p$ ) (Pa)		9,3611	Dissipação de energia ( $\Phi_{rel}$ ) (W)	$1,4703 \times 10^{-3}$
Vazão volumétrica ( $Q$ ) (L/min)		0,5	Potência ( $P_f$ ) (W)	$1,8618 \times 10^{-3}$
Carga manométrica ( $H$ ) (m)		$5,6416 \times 10^{-3}$	Vorticidade ( $\zeta_{V,rel}$ ) ( $m^2/s^2$ )	$2,7752 \times 10^{-1}$
Parâmetros adimensionais				
Camada limite	$Ph$	7,2360		
Regime de escoamento	$Re_{ext, \ell, max}$	$1,1781 \times 10^4$		
	$Nd_{ext, \ell, max}$	$5,2360 \times 10^1$		
Vazão volumétrica	$A$	$3,3334 \times 10^2$		
Eficiência	$\eta_s$	4,2958 %		

### 8.5.3 Comparação com bomba Tesla de discos retos

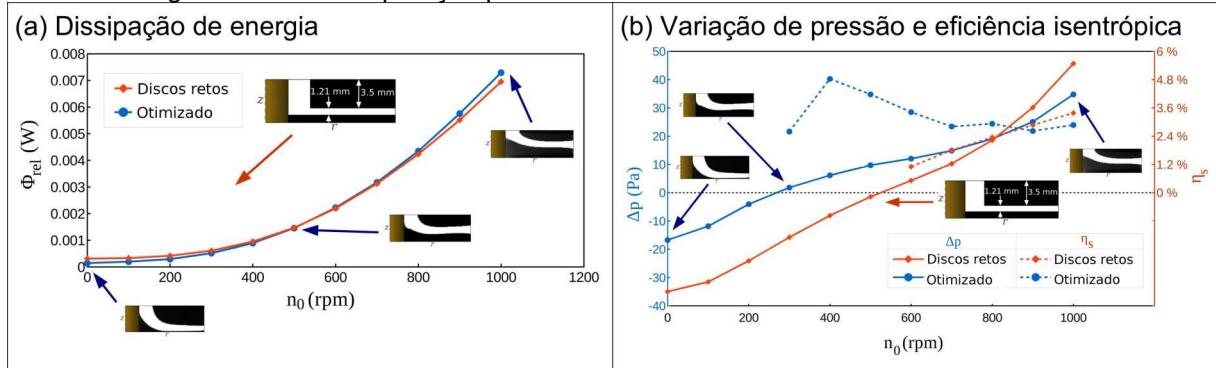
Os resultados de otimização topológica para dissipação de energia foram comparados com bombas Tesla de discos retos com o mesmo volume que o permitido para cada otimização (ver as figuras 8.5.26, 8.5.27 e 8.5.28). Como se pode ver nos gráficos, a bomba Tesla de canais retos tem um desempenho bom quando comparado às geometrias otimizadas, mas pode-se notar que os valores das topologias otimizadas são obtidos por meio de pós-processamento com um filtro simples, o que significa que as fronteiras ainda estão muito “rugosas” (devido à malha discreta) e que a dissipação de energia é maior, e a variação de pressão é menor do que seriam se as fronteiras fossem “suaves” (como quando interpoladas por *splines*) (ver a figura 8.5.29).

Figura 8.5.26 - Comparação para bomba Tesla de entrada horizontal



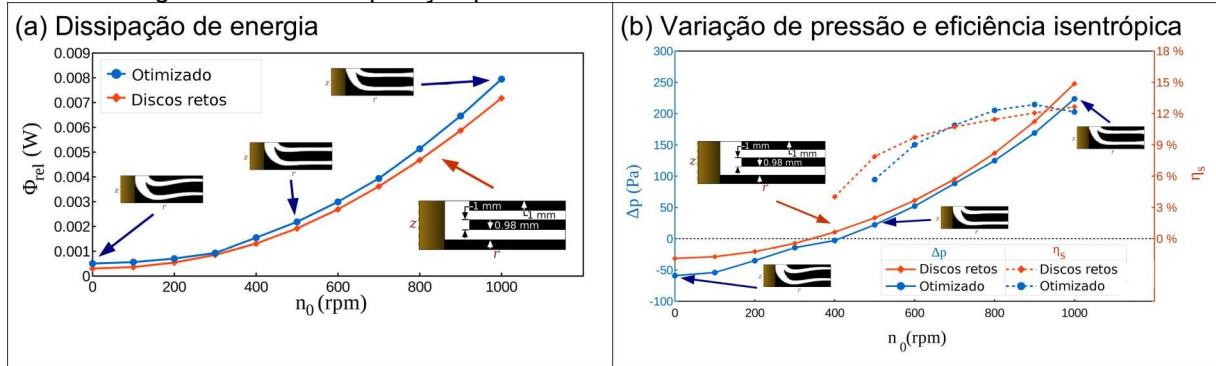
Fonte: Própria (imagem elaborada com o LibreOffice Calc)

Figura 8.5.27 - Comparaçao para bomba Tesla de entrada vertical de um canal



Fonte: Própria (imagem elaborada com o LibreOffice Calc)

Figura 8.5.28 - Comparaçao para bomba Tesla de entrada vertical de dois canais



Fonte: Própria (imagem elaborada com o LibreOffice Calc)

Figura 8.5.29 - Exemplo de fronteira da malha filtrada (pós-processada)

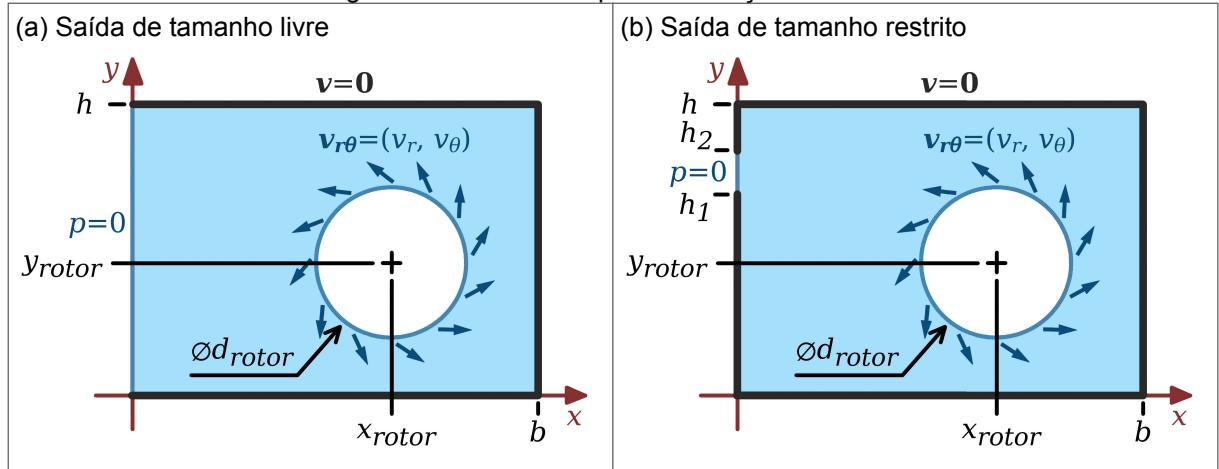


Fonte: Própria (imagem elaborada com o GIMP)

## 8.6 OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA DA VOLUTA DA BOMBA TESLA

Os modelos utilizados para otimização topológica da voluta estão representados na figura 8.6.1. Foi imposta uma certa distância com relação à saída para evitar que o fluido chegasse até a saída pelo menor caminho (i.e., uma reta a partir do centro do rotor), que não é necessariamente o caminho ótimo.

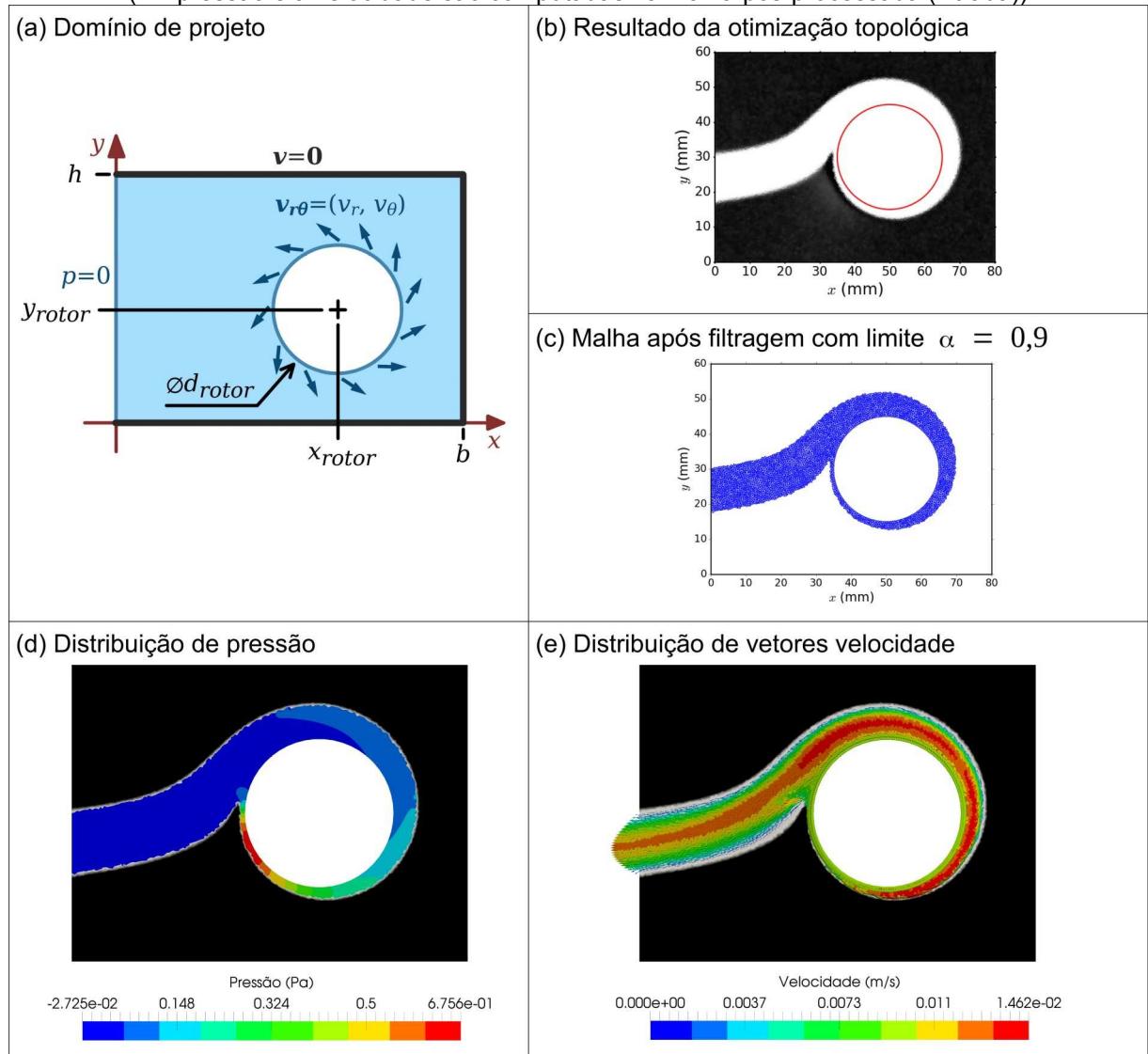
Figura 8.6.1 - Modelos para otimização da voluta



Fonte: Própria

Para a otimização com saída de tamanho restrito, os resultados estão na figura 8.6.2. Os parâmetros utilizados estão na tabela 8.6.1.

Figura 8.6.2 - Otimização topológica de voluta com saída de tamanho livre  
(\* A pressão e a velocidade são computadas na malha pós-processada (filtrada))



Fonte: Própria (imagens elaboradas com o GIMP, a biblioteca Matplotlib de Python e o ParaView)

Tabela 8.6.1 - Parâmetros do modelo utilizado para otimização topológica da voluta com saída de tamanho livre

Parâmetros de entrada			
Velocidade radial ( $v_r$ )	0,001 m/s	Velocidade tangencial ( $v_\theta$ )	0,01 m/s
Pressão na saída	0 Pa *	Forças de corpo	$\rho \cdot \mathbf{f} = (0, 0, 0)$
Dimensões			
$h$	60 mm	$x_{\text{rotor}}$	50 mm
$b$	80 mm	$y_{\text{rotor}}$	30 mm
$d_{\text{rotor}}$	30 mm		
Malha			
Malha não-estruturada com resolução 128.			
Número de nós: 17.179			
Número de elementos: 33.626			
Máximo diâmetro de elemento: 0,78125 mm			
Estimativa inicial de distribuição da pseudo-densidade ( $\alpha$ )			
Distribuição uniforme da fração de $\alpha = f - 1\%$ , em que $f$ é a fração máxima especificada de volume no domínio de projeto, e 1% é uma margem para garantir que a estimativa inicial vai estar dentro da restrição de volume.			
Esquema de otimização			
→ Passo 1: $f = 30\%$ , $q = 0,1$ $\kappa_{\text{mín}} = 0$ $\kappa_{\text{máx}} = 2,5 \cdot \mu \cdot 10^4 = 2,5 \cdot 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3 \text{ s})$ Número máximo de iterações: <u>20</u>		→ Passo 2: $\kappa_{\text{máx}} = 2,5 \cdot \mu \cdot 10^6 = 2,5 \cdot 10^3 \text{ kg}/(\text{m}^3 \text{ s})$ Número máximo de iterações: <u>20</u>	
→ Passo 3: $q = 1,0$ Número máximo de iterações: <u>50</u>			
Parâmetros da configuração da malha após filtragem			
Variação de pressão ( $\Delta p$ )	$-1,8973 \times 10^{-1} \text{ Pa}$	Dissipação de energia ( $\Phi$ )	$1,8889 \times 10^{-5} \text{ W}$
Carga manométrica ( $H$ )	$-1,9634 \times 10^{-5} \text{ m}$	Vorticidade ( $\xi_v$ )	$1,7334 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}^2$
Número de Reynolds ( $Re_{\ell, \text{máx}}$ )	$2,4408 \times 10^3$		

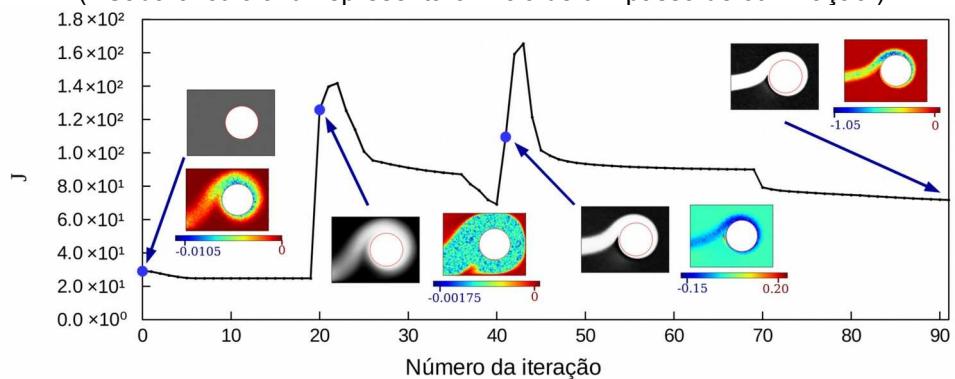
\* A saída é aberta para a atmosfera usando  $p = 0$  como referência de pressão.

A vazão que corresponde à velocidade radial na otimização acima, considerando voluta de espessura unitária, é de cerca de 5,65 L/min ( $9,42 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ ).

O formato obtido na figura 8.6.2a mostra que o formato ótimo de uma voluta é uma espiral, que é o formato que vem sendo utilizado há muito tempo no projeto de voluta de bombas.

A figura 8.6.3 mostra a curva de convergência para a voluta otimizada da figura 8.6.2.

Figura 8.6.3 - Curva de convergência da otimização topológica da voluta para a função objetivo, mostrando a topologia (em escala de cinza) e sensibilidade (em escala de cores) em cada iteração (expressa em unidades do CGS)  
(\* Cada círculo azul representa o início de um passo de otimização.)



Fonte: Própria (imagem elaborada com LibreOffice Calc)

A influência da fração de fluido permitida está ilustrada na tabela 8.6.2. Assim, percebe-se que o tamanho da espiral da voluta e o canal aumentam com o aumento da fração de fluido, e o canal se desloca mais para baixo.

Tabela 8.6.2 - Influência da fração de fluido na topologia otimizada com saída de tamanho livre

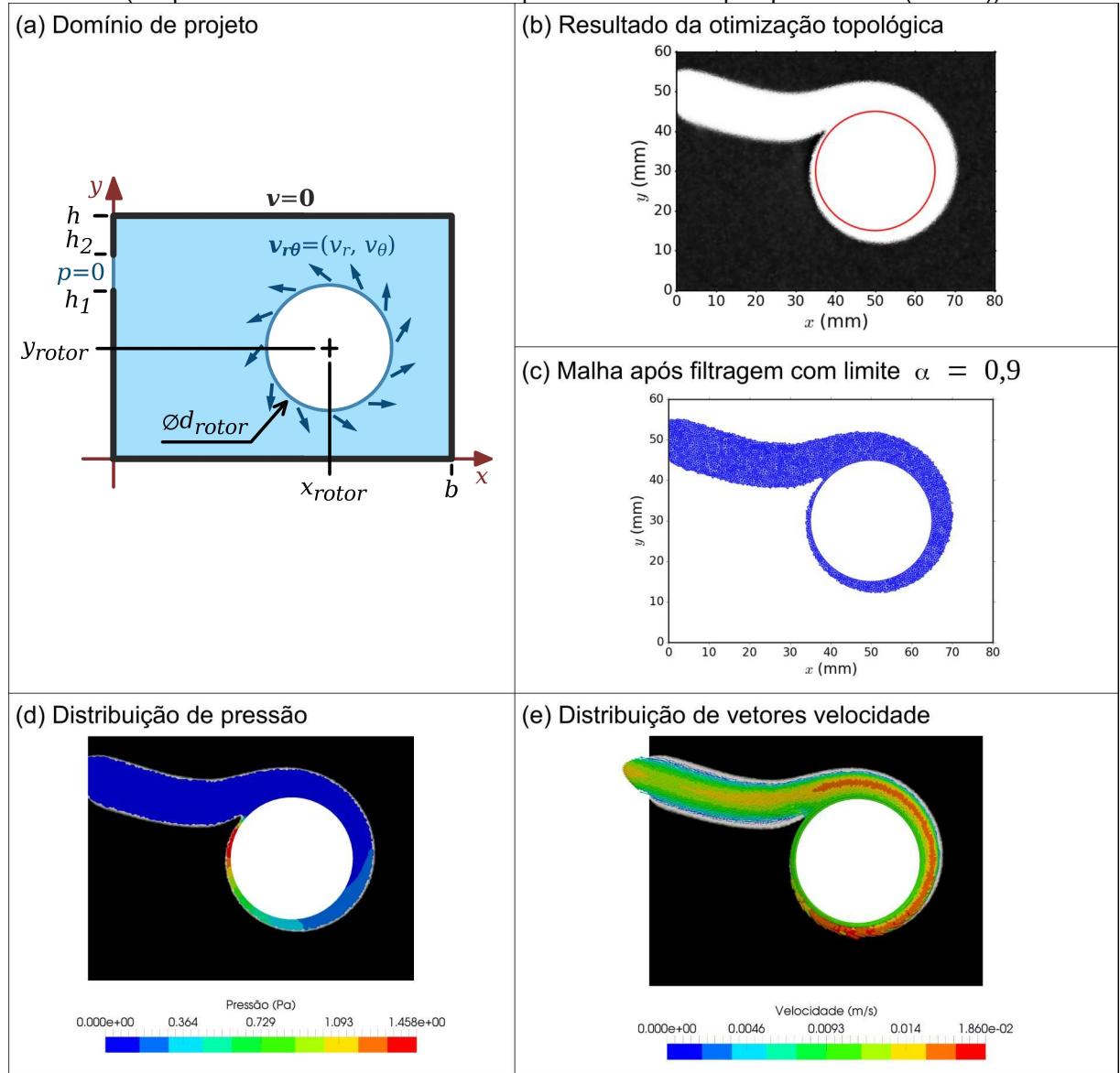
$f = 20\%$	$f = 30\%$	$f = 40\%$
Parâmetros após filtragem	Parâmetros após filtragem	Parâmetros após filtragem
$\Delta p$	$\Phi$	$\Delta p$
$-1,3634 \text{ Pa}$	$1,1937 \times 10^{-4} \text{ W}$	$-1,8973 \times 10^{-1} \text{ Pa}$
$H$	$\xi$	$H$
$-1,3453 \times 10^{-4} \text{ m}$	$1,1170 \times 10^{-1} \text{ m}^2/\text{s}^2$	$-1,9634 \times 10^{-5} \text{ m}$
		$1,7334 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}^2$
		$-4,8837 \times 10^{-6} \text{ m}$
		$4,5662 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}^2$

Na tabela 8.6.2, pode-se observar que a posição da lingueta (“quebra-fluxo”, “*tongue*”, “*cutwater*”) da voluta é aproximadamente central, o que pode se dever à influência da simetria vertical da malha de elementos finitos. Assim, deve ser possível induzir a formação da voluta por meio da imposição de uma lingueta na malha de elementos finitos.

Quanto aos parâmetros de cada topologia, os valores são menores quanto mais fluido é permitido no domínio de projeto.

Para a otimização de voluta com saída de tamanho restrito, os resultados estão na figura 8.6.4. Os parâmetros utilizados estão na tabela 8.6.3.

Figura 8.6.4 - Otimização topológica de voluta com saída de tamanho restrito (tangencial em cima)  
 (\* A pressão e a velocidade são computadas na malha pós-processada (filtrada))



Fonte: Própria (imagens elaboradas com o GIMP, a biblioteca Matplotlib de Python e o ParaView)

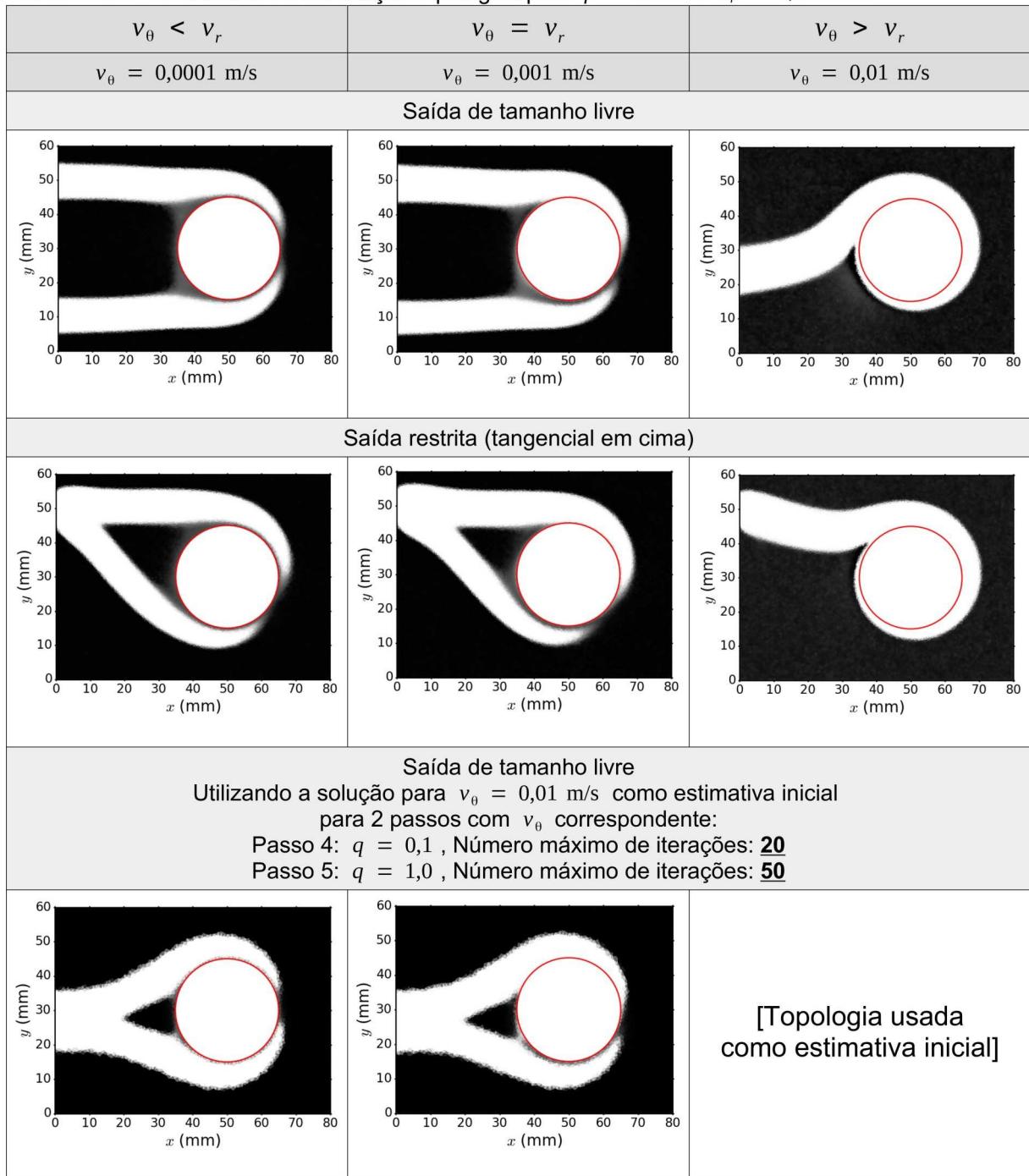
Tabela 8.6.3 - Parâmetros do modelo utilizado para otimização topológica da voluta com saída de tamanho restrito (tangencial em cima)

Parâmetros de entrada			
Velocidade radial ( $v_r$ )	0,001 m/s	Velocidade tangencial ( $v_\theta$ )	0,01 m/s
Pressão na saída	0 Pa *	Forças de corpo	$\rho \cdot \mathbf{f} = (0, 0, 0)$
Dimensões			
$h$	60 mm	$x_{\text{rotor}}$	50 mm
$b$	80 mm	$y_{\text{rotor}}$	30 mm
$h_1$	45 mm ( $y_{\text{rotor}} + \frac{d_{\text{rotor}}}{2}$ )	$d_{\text{rotor}}$	30 mm
$h_2$	55 mm ( $h$ )		
Malha			
Malha não-estruturada com resolução 128.			
Número de nós: 17.179 Número de elementos: 33.626 Máximo diâmetro de elemento: 0,78125 mm			
Estimativa inicial de distribuição da pseudo-densidade ( $\alpha$ )			
Distribuição uniforme da fração de $\alpha = f - 1\%$ , em que $f$ é a fração máxima especificada de volume no domínio de projeto, e 1% é uma margem para garantir que a estimativa inicial vai estar dentro da restrição de volume.			
Esquema de otimização			
→ Passo 1: $f = 30\%$ , $q = 0,1$ $\kappa_{\text{mín}} = 0$ $\kappa_{\text{máx}} = 2,5 \cdot \mu \cdot 10^4 = 2,5 \cdot 10^1 \text{ kg/(m}^3 \text{s)}$ Número máximo de iterações: <u>20</u>		→ Passo 2: $\kappa_{\text{máx}} = 2,5 \cdot \mu \cdot 10^6 = 2,5 \cdot 10^3 \text{ kg/(m}^3 \text{s)}$ Número máximo de iterações: <u>20</u>	
→ Passo 3: $q = 1,0$ Número máximo de iterações: <u>50</u>			
Parâmetros da configuração da malha após filtragem			
Variação de pressão ( $\Delta p$ )	$-3,8181 \times 10^{-1} \text{ Pa}$	Dissipação de energia ( $\Phi$ )	$3,2605 \times 10^{-5} \text{ W}$
Carga manométrica ( $H$ )	$-3,6941 \times 10^{-5} \text{ m}$	Vorticidade ( $\xi_V$ )	$3,0498 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}^2$
Número de Reynolds ( $Re_{\ell, \text{máx}}$ )	$2,9883 \times 10^3$		

\* A saída é aberta para a atmosfera usando  $p = 0$  como referência de pressão.

Pela figura 8.6.4, pode-se perceber que a imposição de uma saída foi capaz de deslocar os pontos de início e término da espiral da voluta mais para cima.

Na tabela 8.6.4, tem-se uma comparação visual das topologias para diferentes velocidades no rotor.

Tabela 8.6.4 - Resultados de otimização topológica para  $f = 30\%$  e  $v_r = 0,001 \text{ m/s}$ 

A partir das figuras acima, percebe-se que, para velocidades tangenciais maiores, existe uma tendência de formar dois canais com a saída.

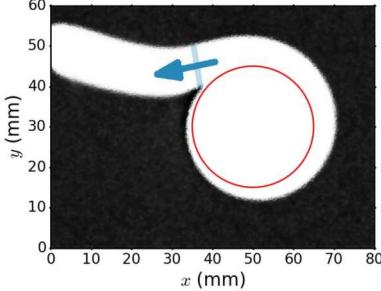
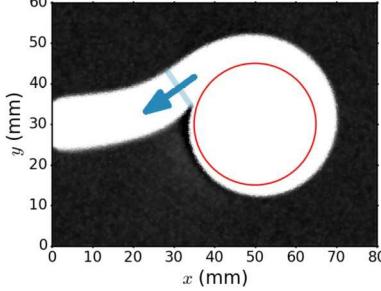
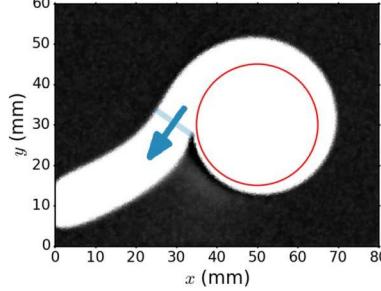
Se a velocidade radial for reduzida mais do que  $v_r = 0,001 \text{ m/s}$ , que corresponde a uma vazão de cerca de 5,64 L/min, o fluido chega a não conseguir formar um canal até a saída por meio de viscosidade, e a formação de canal fica

dominada pelo modelo de material, i.e. chega a formar um caminho reto a partir do centro do rotor até a saída.

No caso da bomba Tesla, como a velocidade tangencial é maior do que a radial, a geometria otimizada se enquadra no caso de  $v_r = 0,001$  m/s e  $v_\theta = 0,01$  m/s.

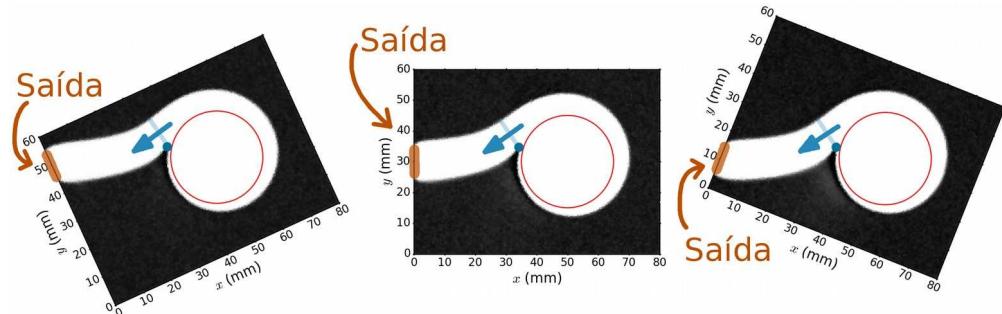
Para análise do canal que se forma após o formato espiral da voluta, impõe-se a saída em diversas alturas de forma a permitir uma comparação de dissipação de energia.

Tabela 8.6.5 - Influência da posição do canal de saída na topologia otimizada com saída de tamanho restrito e  $f = 30\%$

Saída tangencial em cima	Saída central	Saída tangencial embaixo			
					
Parâmetros apóis filtragem		Parâmetros apóis filtragem		Parâmetros apóis filtragem	
$\Delta p$	$\Phi$	$\Delta p$	$\Phi$	$\Delta p$	$\Phi$
$-3,8181 \times 10^{-1}$ Pa	$3,2605 \times 10^{-5}$ W	$-2,7913 \times 10^{-1}$ Pa	$2,5209 \times 10^{-5}$ W	$-3,0799 \times 10^{-1}$ Pa	$2,7027 \times 10^{-5}$ W
$H$	$\xi$	$H$	$\xi$	$H$	$\xi$
$-3,6941 \times 10^{-5}$ m	$3,0498 \times 10^{-2}$ m $^2$ /s $^2$	$-2,7704 \times 10^{-5}$ m	$2,3377 \times 10^{-2}$ m $^2$ /s $^2$	$-2,9401 \times 10^{-5}$ m	$2,5107 \times 10^{-2}$ m $^2$ /s $^2$

Como se pode observar acima, a dissipação de energia no caso de saída central é menor, porém, como se pode notar na figura 8.6.5, os formatos de voluta são iguais, mudando somente a seção transversal de saída. Portanto, com uma saída perpendicular ao canal da voluta, tem-se uma dissipação de energia menor.

Figura 8.6.5 - Rotacionando as topologias de voluta para comparação do formato



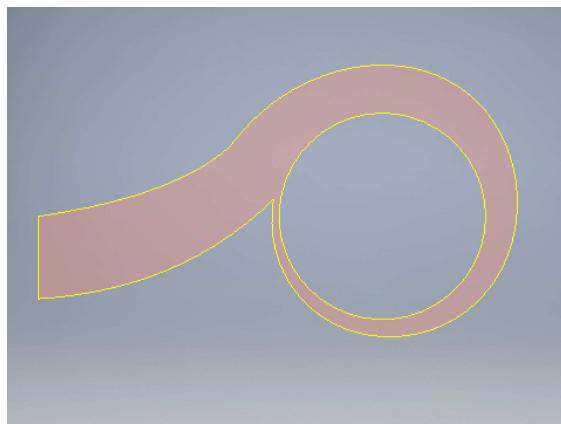
Fonte: Própria (imagem elaborada com o GIMP e a biblioteca Matplotlib de Python)

### 8.6.1 Comparação com uma voluta comum

#### **Voluta otimizada**

Seguiu-se o projeto da voluta otimizada da figura 8.6.2. Utilizando-se o software LibreOffice Draw para obter as dimensões de pontos da geometria otimizada, interpretou-se o perfil por meio de *splines* em programa de CAD (Autodesk® Inventor). A geometria resultante pode ser vista na figura 8.6.6.

Figura 8.6.6 - Perfil interpretado da voluta otimizada

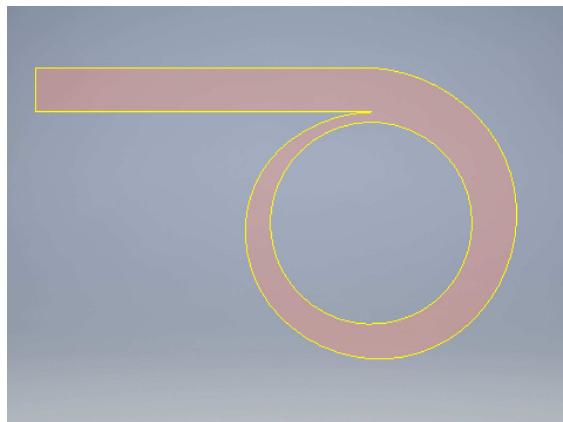


Fonte: Própria (imagem da superfície elaborada no Autodesk® Inventor)

### ***Voluta comum***

De modo a se comparar o projeto otimizado de voluta com um projeto convencional, conforme a figura 7.1.5. Assim, elaborou-se um modelo cujo volume se aproxima do volume do projeto otimizado (figura 8.6.7). Para isso, o espaçamento  $t$  selecionado ficou em 0,73 mm, o que corresponde a uma saída de 6,75 mm de largura.

Figura 8.6.7 - Perfil da voluta comum



Fonte: Própria (imagem da superfície elaborada no Autodesk® Inventor)

Pelo modelo CAD de sólido da voluta otimizada no Autodesk® Inventor (“iProperties”), considerando espessura de 1 mm, o volume do perfil otimizado corresponde a 889,349 mm<sup>3</sup>, enquanto o volume do perfil comum corresponde a 889,567 mm<sup>3</sup>. Assim, tem-se uma diferença relativa de 0,025 % com relação ao volume do perfil otimizado.

### ***Comparação entre a voluta otimizada e a voluta comum***

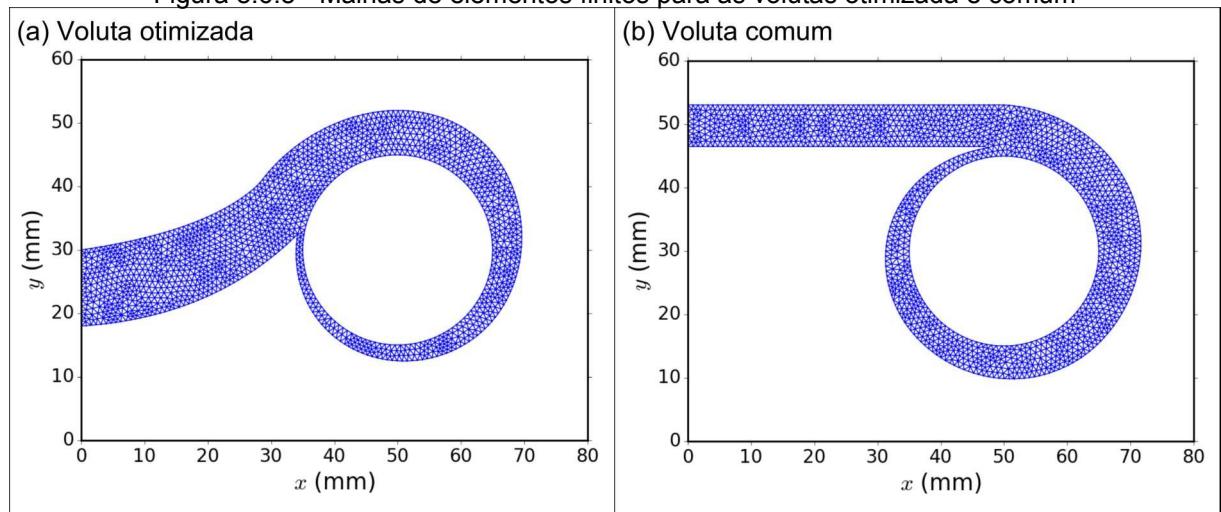
Os desenhos CAD das volutas foram passados para o ANSYS® para gerar uma malha de elementos finitos triangulares. Os parâmetros utilizados para gerar as malhas de elementos finitos no ANSYS® estão na tabela 8.6.6.

Tabela 8.6.6 - Parâmetros dos elementos da malha e estatísticas no ANSYS® (\* Todos os demais parâmetros foram deixados com os seus valores *default*)

Tamanho do elemento (Sizing)		
Parâmetro	Valor	
Size Function	Curvature	
Relevance Center	Fine	
Initial Seed Size	Active Assembly	
Transition	Slow	
Span Angle Center	Fine	
Curvature Normal Angle	5,0°	
<b>Min Size</b>	<b>8,0e-004 m</b>	
<b>Max Face Size</b>	<b>8,0e-004 m</b>	
Max Tet Size	Default (2,0201e-004 m)	
Growth Rate	Default (1,20)	
Automatic Mesh Based on Defeaturing	On	
Defeature Size	Default (5,0502e-007 m)	
Estatísticas (Statistics)		
Parâmetro	Voluta otimizada	Voluta comum
Número de nós (Statistics > Nodes)	6242	6221
Número de elementos (Statistics > Elements)	2938	2909

As malhas de elementos finitos geradas no ANSYS® foram passadas para o FEniCS (figura 8.6.8).

Figura 8.6.8 - Malhas de elementos finitos para as volutas otimizada e comum

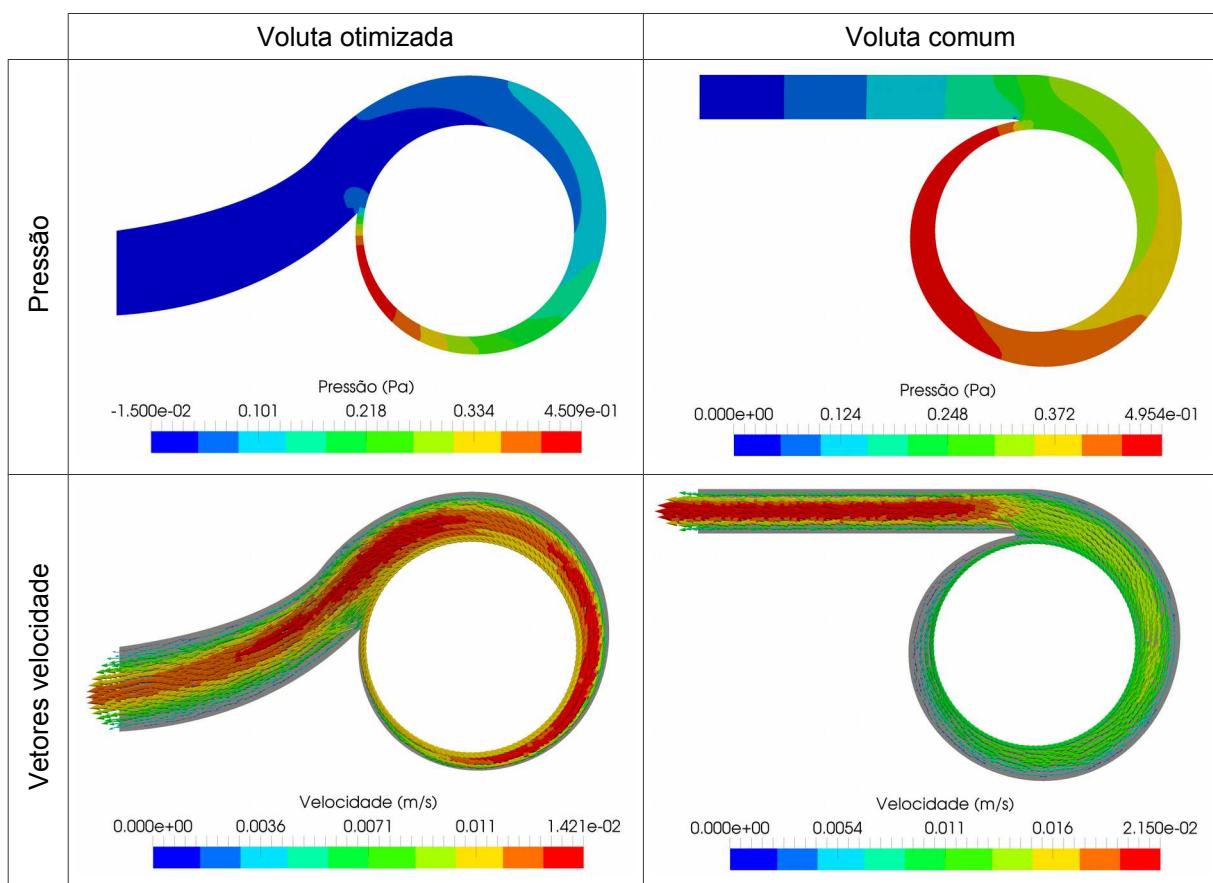


Fonte: Própria (figuras elaboradas com a biblioteca Matplotlib de Python)

As simulações foram feitas nas mesmas condições de otimização (i.e., com água e  $v_r = 0,001$  m/s,  $v_{\theta,abs} = 0,01$  m/s).

As distribuições de pressão e velocidade estão na figura 8.6.9.

Figura 8.6.9 - Pressão e velocidade nas volutas otimizada e comum



Fonte: Própria (figuras elaboradas com o ParaView)

Pela figura acima, pode-se observar que, na espiral, a pressão começa com magnitudes semelhantes para as duas volutas, diminuindo para 0 Pa na saída (\* o valor  $-1,5 \times 10^{-2}$  Pa do gráfico de pressão na voluta otimizada ocorre perto da lingueta). Nas distribuições de vetores velocidade, nota-se uma distribuição parabólica na voluta otimizada que prossegue, desde o início da espiral, de maneira mais uniforme do que a voluta comum.

Na tabela 8.6.7, tem-se uma comparação de parâmetros para as duas volutas. A vazão de operação para as velocidades escolhidas é de 5,6522 L/min ( $9,4203 \times 10^{-5}$  m<sup>3</sup>/s).

Tabela 8.6.7 - Comparação de valores entre a voluta otimizada e a voluta comum considerando-se espessura unitária (“1 m”) no domínio 2D

	Voluta otimizada	Voluta comum
Variação de pressão ( $\Delta p$ )	$-1,5505 \times 10^{-1}$ Pa	$-3,8968 \times 10^{-1}$ Pa
Carga manométrica ( $H$ )	$-1,5957 \times 10^{-5}$ m	$-2,8706 \times 10^{-5}$ m
Dissipação de energia ( $\Phi$ )	$1,5521 \times 10^{-5}$ W	$2,7686 \times 10^{-5}$ W
Vorticidade ( $\xi_v$ )	$1,4096 \times 10^{-2}$ m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	$2,6154 \times 10^{-2}$ m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
Número de Reynolds ( $Re_{\ell, \text{máx}}$ )	$2,3723 \times 10^3$	$3,2516 \times 10^3$

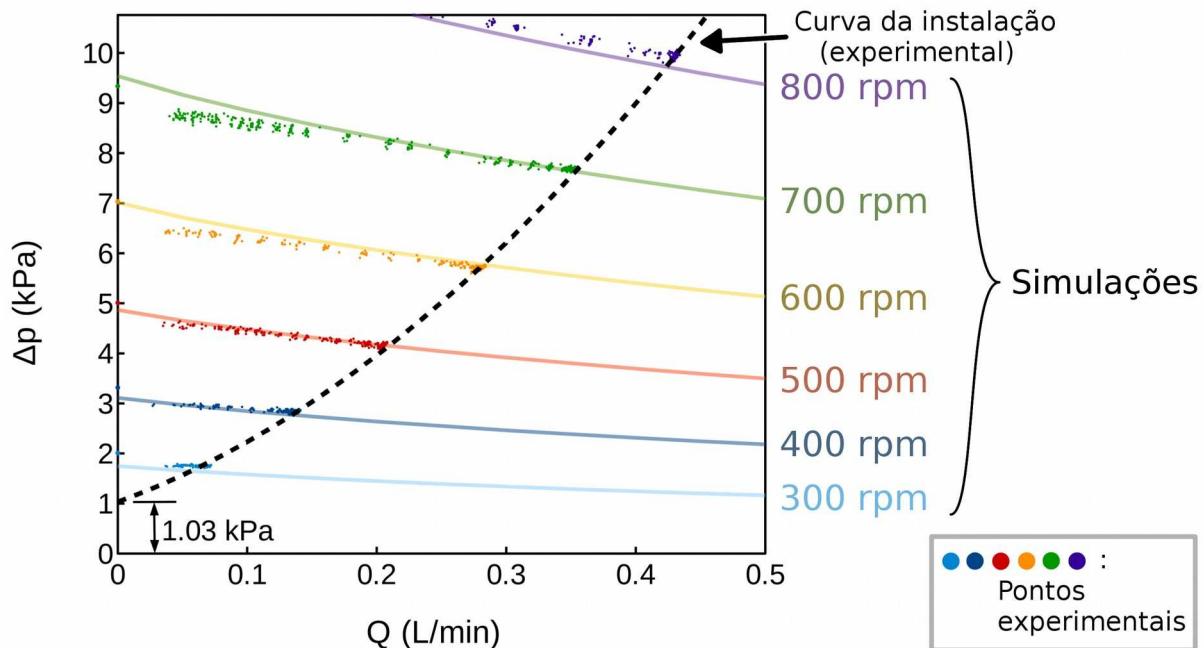
Na tabela acima, percebe-se que a voluta otimizada é melhor em todos os parâmetros analisados em cerca de 2 vezes na maior parte dos parâmetros analisados.

## 8.7 EXPERIMENTOS COM A BOMBA TESLA DE CDs

Os experimentos com a bomba Tesla de CDs foram realizados com rotações de 300 a 800 rpm (figura 8.7.1). O resultados experimentais estão indicados na forma de uma nuvem de pontos, porque as medições foram realizadas de forma contínua a cada segundo.

Para uma mesma rotação, a vazão e a pressão são avaliados para diferentes fechamentos da válvula. Ao ir fechando a válvula, a curva da instalação (obtida com os pontos extremos das curvas de cada rotação, com a válvula completamente aberta) se inclina e se desloca para a esquerda mantendo ponto 1,03 kPa parado. O valor 1,03 kPa vem da figura 7.3.4 (103 mm, que correspondem a 0,103 mca (metros de coluna de água)). Para se obter valores de pressão comparáveis com os valores de pressão simulados, somou-se a queda de pressão devida à altura da saída da bomba Tesla (76 mm, que correspondem a 0,076 mca  $\approx$  0,76 kPa) aos valores experimentais.

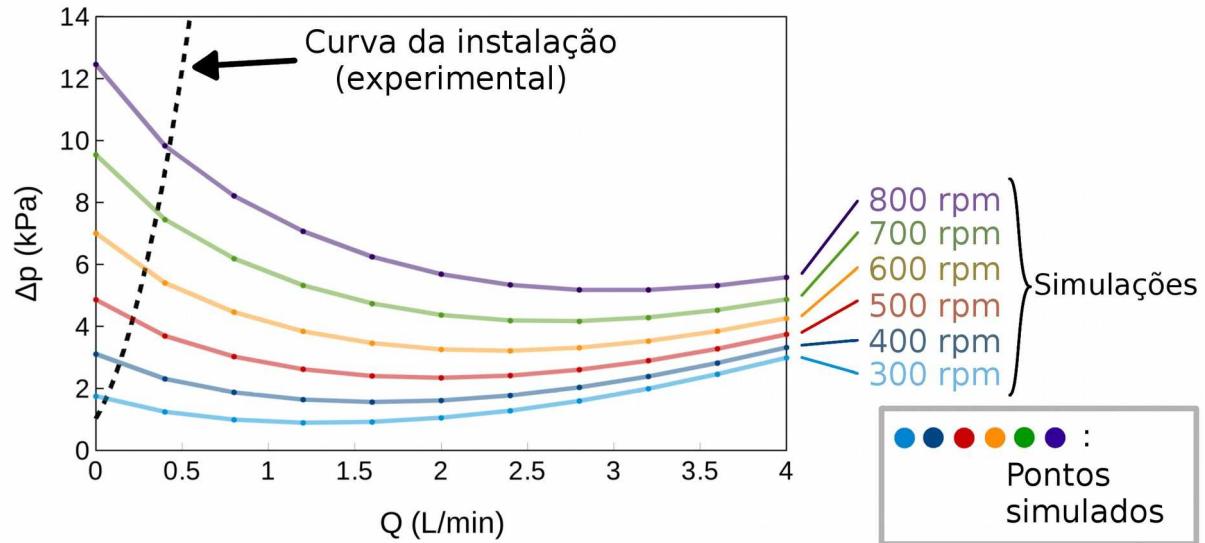
Figura 8.7.1 - Curva de pressão x vazão volumétrica obtida experimentalmente e sobreposta aos seus valores de simulações do modelo da figura 8.2.1 (\* As curvas de simulação são desenhadas a partir de 10 pontos igualmente espaçados no intervalo 0 ~ 0,5L/min)



Conforme pode-se observar na figura 8.7.1, a variação de pressão medida experimentalmente é coerente com os valores simulados, mesmo o modelo usado nas simulações sendo muito simplificado. Medições de vazão muito próximas de zero não estão indicadas, porque saem do intervalo de medição do sensor de vazão. O gráfico é limitado superiormente por 10,76 kPa, que correspondem, ao retirar a compensação da altura interna de 0,76 kPa, ao limite máximo de medição de pressão do sensor (10 kPa).

Para se ter uma visão mais ampla das curvas da bomba Tesla na figura 8.7.1 obtidas em simulação, o gráfico da figura 8.7.2 se estende até 4 L/min.

Figura 8.7.2 - Curvas de pressão x vazão volumétrica estendidas, obtidas em simulações do modelo da figura 8.2.1



Fonte: Própria

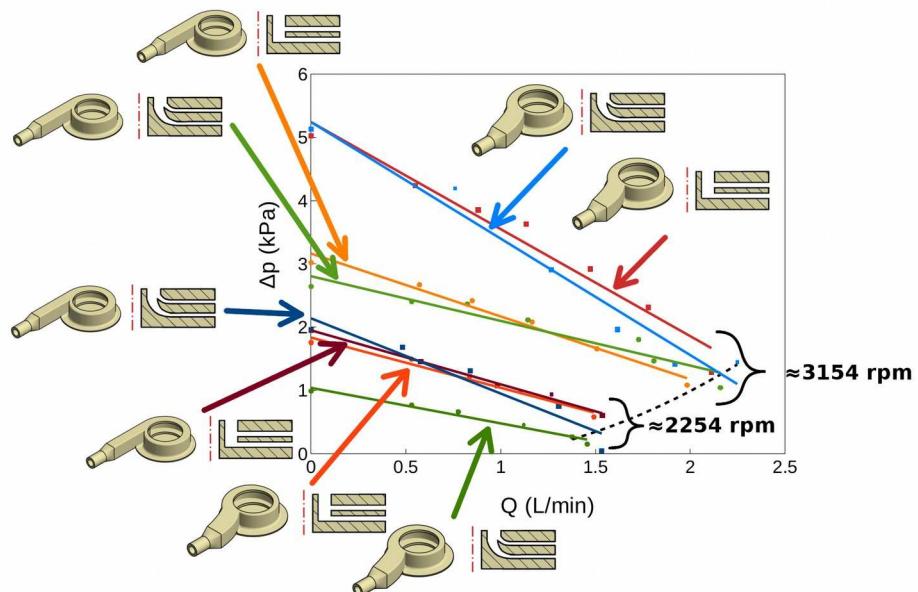
Durante os experimentos, notou-se que o eixo do rotor não estava completamente balanceado, causando um pouco de trepidação, que se intensificava em vazões mais elevadas.

Como o ajuste do retentor ficou muito justo no eixo, a força exigida do motor de passo aumentou muito, o que restringiu a sua rotação para, no máximo, cerca de 200 rpm. Assim, para permitir maiores rotações, soltou-se um pouco o retentor do eixo, permitindo um vazamento mínimo por ele.

## 8.8 EXPERIMENTOS COM A MINI BOMBA TESLA

Como o sensor de vazão não conseguia medir com a mini bomba Tesla na rotação utilizada na otimização (500 rpm), utilizaram-se as rotações 2254 rpm e 3154 rpm (figura 8.8.1).

Figura 8.8.1 - Curva de pressão x vazão volumétrica obtida experimentalmente



Fonte: Própria

Assim, percebe-se que, no geral, os resultados otimizados apresentam menor variação de pressão do que os resultados projetados de forma convencional (com mesmo volume de fluido dentro). Esse efeito pode se dever ao fato de que, na otimização topológica, não se especificou um ponto de operação (i.e., a carga manométrica para dada vazão). Assim, a otimização topológica pode ter ido para um ponto de mínimo que suporta uma carga manométrica pequena.

## 9 CONCLUSÃO

O projeto da bomba Tesla de CDs foi realizado por meio de análise paramétrica do espaçamento entre discos, utilizando-se um projeto de voluta convencional. As medições experimentais resultaram coerentes com as simulações do modelo simplificado de dois discos da bomba Tesla.

Os projetos do rotor e da voluta de uma bomba Tesla foram otimizados considerando-se água em regime permanente e escoamento laminar. Os resultados de otimização topológica da bomba Tesla com entrada vertical se assemelham ao impulsor de viscosidade (“*viscosity impeller*”) da figura 3.0.3b (EFFENBERGER, 1983, p. 3) e à bomba Tesla com discos não-planos da figura 3.0.6 (sugerida por Yu (2015, p. 92)). Os resultados experimentais mostram que as configurações otimizadas demonstraram menor pressão do que as configurações não-otimizadas, o que pode se dever a não imposição de um ponto de operação (carga manométrica) na otimização topológica.

Como trabalhos futuros, sugere-se a inclusão da carga manométrica na otimização topológica na forma de restrição de valor mínimo ou de maximizar o seu valor, a aplicação em escoamentos de fluidos não-newtonianos (como o sangue, em aplicação para DAVs (“Dispositivos de Assistência Ventricular”)), escoamentos turbulentos (o que possibilita simulação e otimização com rotações mais elevadas) e escoamentos compressíveis (como em gases). Uma outra possibilidade é a implementação de simulação e otimização em regime transitório (ao invés de regime permanente), utilizando-se métodos como o IPCS (“*Incremental Pressure Correction Scheme*”), de Chorin etc. A vantagem é que, apesar de haver a necessidade de rodar diversas iterações até chegar em um regime permanente, não há problema de estabilidade e turbulência, que existe nas equações de Navier-Stokes em regime permanente. Sugere-se também a aplicação em turbinas Tesla, que possuem escoamento contrário ao da bomba Tesla.

## REFERÊNCIAS

- AARONSON, K. D.; SLAUGHTER, M. S.; MILLER, L. W.; MCGEE, E. C.; COTTS, W. G.; ACKER, M. a.; JESSUP, M. L.; GREGORIC, I. D.; LOYALKA, P.; FRAZIER, O. H.; JEEVANANDAM, V.; ANDERSON, A. S.; KORMOS, R. L.; TEUTEBERG, J. J.; LEVY, W. C.; NAFTEL, D. C.; BITTMAN, R. M.; PAGANI, F. D.; HATHAWAY, D. R.; BOYCE, S. W. **Use of an Intrapericardial, Continuous-Flow, Centrifugal Pump in Patients Awaiting Heart Transplantation.** AHA Circulation Journal, v. 125, n. 25, p. 3191 ~ 3200 (2012).
- ALLEN, J. S. **A model for fluid flow between parallel, co-rotating annular disks.** Tese de mestrado. University of Dayton (1990).
- ALMEIDA, S. R. M.; PAULINO, G. H.; SILVA, E. C. N. **Layout and material gradation in topology optimization of functionally graded structures: a global-local approach.** Structural Multidisciplinary Optimization 42, p. 855~868 (2010).
- AMESTOY, P. R.; DUFF, I. S.; L'EXCELLENT, J. Y.; KOSTER, J. **A FULLY ASYNCHRONOUS MULTIFRONTAL SOLVER USING DISTRIBUTED DYNAMIC SCHEDULING.** SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. Vol. 23, No. 1, p. 15~41 (2005).
- ANDRADE, A.; FONSECA, J.; NICOLOSI, D.; BOCK, E.; LEME, J.; VALENTE, P.; PAULISTA, P.; DINKHUYSEN, J.; MANRIQUE, R.; BISCEGLI, J. **Status of brazilian development on blood pumping devices.** 18th International Congress of Mechanical Engineering November 6~11, Ouro Preto, MG (2005).
- ANDREASEN, C. S.; GERSBORG, A. R; SIGMUND, O. **Topology optimization of microfluidic mixers.** International Journal for Numerical Methods in Fluids 61, p. 498~513 (2009).
- ANSYS. **ANSYS.** Disponível em <<http://www.ansys.com/>>. Acesso em: 4 mar. 2017.
- ANTAKI, J. F.; GHATTAS, O.; BURGREEN, G. W.; HE, B. **Computational flow optimization of rotary blood pump components.** Artificial Organs, 19 (7), 608 ~ 615 (1995).
- BEHBAHANI, M.; BEHR, M.; HORMES, M.; STEINSEIFER, U.; ARORA, D.; CORONADO, O.; PASQUALI, M. **A Review of Computational Fluid Dynamics Analysis of Blood Pumps.** European Journal of Applied Mathematics 20, 363 ~ 397 (2009).
- BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. **Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method .** Computer methods in applied mechanics and engineering 71, p. 197~224 (1988).

BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. **Fenômenos de transporte**. 2. ed. São Paulo: LTC, 2002.

BORATE, H. P.; MISAL, N. D. **An effect of surface finish and spacing between discs on the performance of disc turbine**. International Journal of Applied Research in Mechanical Engineering (IJARME), 2231 ~ 5950, Volume 2, Issue 1 (2012).

BORGANAKKE, C.; SONNTAG, R. E. **Fundamentos da termodinâmica**. 8. ed. São Paulo: Blucher, 2013.

BORRVALL, T.; PETERSSON, J. **Topology optimization of fluids in stokes flow**. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 41, 77 ~ 107 (2003).

BRAN, R.; SOUZA, Z. de. **Máquinas de fluxo - turbinas, bombas e ventiladores**. 1. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1969.

BREITER, M. C.; POHLHAUSEN, K. **Laminar flow between two parallel rotating disks**. Aeronautic Research Laboratory Office of Aerospace Research United States Air Force, 1962.

BREZZI, F.; FORTIN, F. **Mixed and Hybrid Finite Element Methods**. 1 ed. New York, Springer-Verlag, 1991.

BUDYNAS, R. G.; NISBETT, J. K. **Elementos de Máquinas de Shigley - Projeto de Engenharia Mecânica**. 8. ed. São Paulo: McGrawHill, Bookman e AMGH, 2008.

CALLISTER, J., W. D. **Ciência e Engenharia de Materiais: Uma introdução**. 7. ed. São Paulo: LTC, 2012.

CHOON, T. W. RAHMAN A. A., JER, F. S.; AIK, L. E. **Optimization of Tesla Turbine Using Computational Fluid Dynamics Approach**. 2011 IEEE Symposium on Industrial Electronics and Applications (ISIEA2011) (2011).

COUTO, H. S.; BATISTA, J. C. **HYBRID TESLA-PELTON WHEEL DISC TURBINE**. US 2011/0027069 A1, Minnesota, 3 fev. 2011.

CRAWFORD, M. E.; RICE, W. **Calculated design data for the multiple disc pump using incompressible fluid**. Journal of Engineering for Power, 96(3), 274~282 (1974).

DENG, Y.; LIU, Z.; WU, Y.; WU, Y. **Topology optimization of steady and unsteady incompressible Navier–Stokes flows driven by body forces**. Structural and Multidisciplinary Optimization 47, 555~570 (2013).

DODSWORTH, J. L.; GROULX, D. **Operational parametric study of a tesla pump including vibration effects**. ASME-ATI-UIT 2015 Conference on Thermal Energy Systems: Production, Storage, Utilization and the Environment (2015).

DODSWORTH, J. L. **Operational parametric study of a prototype tesla pump**. Tese de mestrado. Dalhousie University (2016).

DONEA, J.; HUERTA, A. **Finite Element Methods for Flow problems**. 1 ed. Wiley, 2003.

DUAN, X.; LI, F.; QIN, X. **Topology optimization of incompressible Navier-Stokes problem by level set based adaptive mesh method**. Computers and Mathematics with Applications 72, p. 1131 ~ 1141 (2016).

EFFENBERGER, U. E. **Viscosity Impeller**. US 4,402,647, 6 set. 1983.

ELMAN, H.; SILVESTER, D.; WATHEN, A. **Finite Elements and Fast Iterative Solvers: with Applications in Incompressible Fluid Dynamics**. 1. ed. New York: Oxford University Press, 2005.

ENGEL, S. **Optimizing the hydraulic efficiency of a Tesla pump**. Dissertação de mestrado. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg (2014).

ENGIN, T.; ÖZDEMİR, M.; ÇEŞMECI, Y. **Design, testing and two-dimensional flow modeling of a multiple-disk fan**. Experimental Thermal and Fluid Science 33 (2009), p. 1180 ~ 1187 (2009).

ERCEGOVAC, M. D. **Omnipresence of Tesla's Work and Ideas**. Proceedings for the 6th International Symposium Nikola Tesla, Belgrade, Servia (2006).

EVGRAFOV, A. **Topology Optimization of Navier-Stokes Equations**. Nordic MPS 2004. Linköping Electronic Conference Proceedings (2004). Disponível em: <<http://www.ep.liu.se/ecp/article.asp?issue=014&article=003&volume=>>>. Acesso em: 7 out. 2017.

EVGRAFOV, A. **Topology optimization of slightly compressible fluids**. Z. Angew. Math. Mech. 86, No. 1, p. 46 ~ 62 (2006).

FARRELL, P. E. **Mathematical background: adjoints and their applications - Differentiating functionals**. Disponível em <<http://www.dolfin-adjoint.org/en/latest/documentation/mathematics/3-gradients.html>>. Acesso em: 21 fev. 2017.

FARRELL, P. E. **Mathematical background: adjoints and their applications - Properties of the adjoint equations**. Disponível em <<http://www.dolfin-adjoint.org/en/latest/documentation/mathematics/4-adjoint.html>>. Acesso em: 24 abr. 2017.

FARRELL, P. E. **Examples of using dolfin-adjoint: Topology optimisation of fluids in Stokes flow.** Disponível em <<http://www.dolfin-adjoint.org/en/latest/documentation/manual.html>>. Acesso em: 3 abr. 2017.

FARRELL, P. E.; FUNKE, S. W. **How to use dolfin-adjoint: Verification.** Disponível em <<http://www.dolfin-adjoint.org/en/latest/documentation/verification.html>>. Acesso em: 3 abr. 2017.

FARRELL, P. E.; FUNKE, S. W., HAM, D. A.; ROGNES, M. E. **dolfin-adjoint Automatic adjoint models for FEniCS.** 2015. Disponível em <<https://www.simula.no/file/poster0pdf/download>>. Acesso em: 24 abr. 2017.

FARRELL, P. E.; HAM, D. A.; FUNKE, S. W.; ROGNES, M. E. **AUTOMATED DERIVATION OF THE ADJOINT OF HIGH-LEVEL TRANSIENT FINITE ELEMENT PROGRAMS.** SIAM Journal on Scientific Computing 35.4, p. C369~C393 (2013). Disponível em <[http://www.dolfin-adjoint.org/en/latest/\\_static/dolfin\\_adjoint.pdf](http://www.dolfin-adjoint.org/en/latest/_static/dolfin_adjoint.pdf)>. Acesso em: 24 abr. 2017.

FENICS BITBUCKET. **FEniCS Project (fenics-project).** Disponível em <<https://bitbucket.org/fenics-project/>>. Acesso em: 6 jan. 2017.

FUNKE, S. W.; MASSING, A.; FARRELL, P. E.; VANDEKERCKHOVE, S. **Examples of using dolfin-adjoint.** Disponível em <<http://www.dolfin-adjoint.org/en/latest/documentation/examples.html>>. Acesso em: 3 abr. 2017.

FOO, S. J.; TAN, W. C.; SHAHRIL, M. **Development of tesla turbine for green energy application.** National Conference in Mechanical Engineering Research and Postgraduate Studies (2<sup>nd</sup> NCMER 2010), p. 671 ~ 1187 (2010).

FOSTER, M. **The potential of a tesla type device as a non pulsatile blood pump.** Tese de PhD. Middlesex University London (2006).

FULLER, H. J. **Wind turbine for generation of electric power.** US 7,695,242, 13 abr. 2010.

GRANDE III, S. F.; DRAPER, D. R. **BLADELESS CONICAL RADIAL TURBINE AND METHOD.** US 2005/0214109 A1, 29 set. 2005.

GUEST, J. K.; PRÉVOST, J. H. **Topology optimization of creeping fluid flows using a Darcy–Stokes finite element.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, 66, p. 461 ~ 484 (2006).

GUPTA E., H.; KODALI, S. P. **Design and Operation of Tesla Turbo machine - A state of the art review.** International Journal of Advanced Transport Phenomena Vol. 02, No. 01 (2013).

GURTIN, M. E. **An Introduction to Continuum Mechanics.** 1. ed. London, Academic Press, 1981.

GUZMÁN, J.; SALGADO, A. J.; SAYAS, F. **A NOTE ON THE LADYZENSKAJA-BABUŠKA-BREZZI CONDITION.** Journal of Scientific Computing (2012).

HOLLAND, K. **Design, construction and testing of a Tesla Turbine.** Dissertação de mestrado. Laurentian University, The Faculty of Graduate Studies (2015).

HO-YAN, B. P. **Tesla Turbine for Pico Hydro Applications.** Guelph Engineering Journal, 4, 1 ~ 8(2011).

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; BERGMAN, T. L.; LAVINE, A. S. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa.** 6. ed. São Paulo: LTC, 2008.

IZRAELEV, V.; WEISS, W. J.; FRITZ, B.; NEWSWANGER, R. K.; PATERSON, E. G.; SNYDER, A.; MEDVITZ, R. B.; CYSYK, J.; PAE, W. E.; HICKS, D.; LUKIC, B.; ROSENBERG, G. **A Passively Suspended Tesla Pump Left Ventricular Assist Device.** ASAIO Journal, 556 ~ 561 (2009).

JENSEN, K. E.; SZABO, P.; OKKELS, F. **Topology optimization of viscoelastic rectifiers.** Applied Physics Letters, 100, 234102 (2012).

JHUN, C.; NEWSWANGER, R.; CYSYK, J.; LUKIC, B; WEISS, W.; ROSENBERG, G. **Tesla-Based Blood Pump and Its Applications.** Journal of Medical Devices, (2013).

KOGA, A. K. **Projeto de dispositivos de microcanais utilizando o método de otimização topológica.** Dissertação de mestrado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo (2010). Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3152/tde-01092011-160125/en.php>>. Acesso em: 20 abr. 2017.

LADINO, A. F. R. **Numerical Simulation of the Flow Field in a Friction-Type Turbine (Tesla Turbine).** Diploma thesis. Institute of Thermal Powerplants, Vienna University of Technology (2004).

LAI, W. M.; RUBIN, D.; KREMPL, E. **Introduction to Continuum Mechanics.** 4. ed. Butterworth-Heinemann, 2010.

LAMPART, P.; KOSOWSKI, K.; PIWOWARSKI, M.; JĘDRZEJEWSKI, Ł. **Design analysis of Tesla micro-turbine operating on a low-boiling medium.** POLISH MARITIME RESEARCH, Special issue 2009/S1, p. 28 ~ 33 (2009).

LANGTANGEN, H. P.; LOGG, A. **Solving PDEs in Minutes – The FEniCS Tutorial Volume I.** Disponível em <<https://fenicsproject.org/pub/tutorial/pdf/fenics-tutorial-vol1.pdf>>. Acesso em: 5 dez. 2016.

LIMA, J. S.; PAULINO, R. H.; SAENZ, J. S. R. **Estudo do modelo de bomba centrífuga de múltiplos discos com aplicação à área biomédica.**

ENCICLOPÉDIA BIOSFERA, Centro Científico Conhecer - Goiânia, v. 9, n.17; p. 3098 ~ 3114 (2013).

LOBANOFF, V. S.; ROSS, R. R. **Centrifugal Pumps: Design and Application**. 2. ed. Massachusetts: Elsevier Butterworth-Heinemann, 1910.

LOGG, A.; MARDAL, K.; WELLS, G. N. **Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method - The FEniCS Book**. 1 ed. Springer, 2012. Disponível em <<https://fenicsproject.org/book/>>. Acesso em: 21 out. 2016.

MEDVITZ, R. B.; BOGER, D. A.; IZRAELEV, V.; ROSENBERG, G.; PATERSON, E. G. **CFD Design and Analysis of a Passively Suspended Tesla Pump Left Ventricular Assist Device**. Artificial Organs, 35(5), 522 ~ 533 (2011).

MEKATRONIK. **Acionac® Indústria e Comércio Ltda. Tabela de furo e rasgo de chaveta conforme norma DIN 6885/1**. Disponível em <[http://www.docs.mekatronik.com.br/wp-content/uploads/2010/09/Norma\\_DIN-chavetas.pdf](http://www.docs.mekatronik.com.br/wp-content/uploads/2010/09/Norma_DIN-chavetas.pdf)>. Acesso em: 03 jun. 2017.

MSHCONVERT. **GitHub - mshconvert (mikaem/tools)**. Disponível em <<https://github.com/mikaem/tools/blob/master/mshconvert>>. Acesso em: 13 jun. 2017.

MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. **Fundamentos da mecânica dos fluidos - Tradução da 4ª edição americana**. 4. ed. São Paulo: Blucher, 2004.

NIST. **What Is a Ventricular Assist Device?**. Disponível em <<https://www.nhlbi.nih.gov/health/health-topics/topics/vad>>. Acesso em: 16 out. 2016.

NOSÉ, Y.; YOSHIKAWA, M.; MURABAYASHI, S.; TAKANO, T. **Development of rotary blood pump technology: Past, present, and future**. Artificial Organs, 24 (6), 412 ~ 420 (2000).

NSK. **Rolamentos**. Catálogo de manuais de rolamentos. Disponível em <[http://nsk.com.br/upload/file/Cat%C3%A1logo%20Geral%20NSK\(1\).pdf](http://nsk.com.br/upload/file/Cat%C3%A1logo%20Geral%20NSK(1).pdf)>. Acesso em: 25 mai. 2017.

O'HAREN, S. D. **Improvements in the Construction of Steam and Gas Turbines**. US2003/0053909, New York, 20 mar. 2003.

OLSEN, D.B. **Rotary blood pumps: A new horizon**. Artificial Organs, 23 (8), 695 ~ 696 (1999).

OLSEN, D. B. **The history of continuous-flow blood pumps**. Artificial Organs, 24 (6), 401 ~ 404 (2000).

OSHER, S.; SETHIAN, J. A. **Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations**. *Journal of Computational Physics* 79, p.12 ~ 49 (1988).

PADT. **ANSYS CFX: Going 2D in CFX**. Disponível em <<http://www.padtinc.com/blog/the-focus/ansys-cfx-going-2d-in-cfx>>. Acesso em: 4 mar. 2017.

PAPOUTSIS-KIACHAGIAS, E. M.; KONOLEONTOS, E. A.; ZYMARIS, A. S.; PAPADIMITRIOU, D. I.; GIANNAKOGLOU, K. C. **Constrained topology optimization for laminar and turbulent flows, including heat transfer**. *Evolutionary and Deterministic Methods for Design, Optimization and Control, Symposium Proceedings* (2011).

PEREIRA, A.; TALISHI, C.; PAULINO, G. C.; MENEZES, I. F. M.; CARVALHO, M. S. **Fluid flow topology optimization in PolyTop: stability and computational implementation**. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 54, 1345 ~ 1364 (2016).

PINGEN, G.; MAUTE, K. **Optimal design for non-Newtonian flows using a topology optimization approach**. *Computers and Mathematics with Applications* 59, p. 2340 ~ 2350 (2010).

PODERGAJS, M. **The Tesla Turbine**. Seminar. University of Ljubljana, Faculty of Mathematics and Physics (2011).

POLYAK, B. T. **NEWTON-KANTOROVICH METHOD AND ITS GLOBAL CONVERGENCE**. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 133, No. 4 (2006).

PUZYREWSKI, R.; TESCH, K. **1D MODEL CALIBRATION BASED ON 3D CALCULATIONS FOR TESLA TURBINE**. *TASK QUARTERLY* 14 No 3, 237~248 (2010).

RAJE, A., SINGH, B.; CHURAI, R.; BORWANKAR, P. **A REVIEW OF TESLA TURBINE**. *International Journal of Mechanical Engineering and Technology (IJMET)*, Volume 6, Issue 10, 28 ~ 31 (2015).

REDDY, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**. 3 ed. New York: Mc Graw-Hill, 2006.

RICE, W. **Tesla turbomachinery**. *Handbook of turbomachinery*. New York: Marcel Dekker, 861 ~ 874 (2003).

RICE, W. **Tesla turbomachinery**. *Proceedings of the International Nikola Tesla Symposium (Sept. 23~25, 1991)* (1991).

RODDY, P. J.; DARBY, R.; MORRISON, G. L.; JENKINS, P. E. **Performance characteristics of a multiple-disk centrifugal pump.** *Journal of Fluids Engineering*, 109(1), 51 ~ 57 (1987).

ROMANIN, V. D. **Theory and Performance of Tesla Turbines.** Tese de doutorado. University of California (2012).

ROMERO, J. S.; SILVA, E. C. N. **A topology optimization approach applied to laminar flow machine rotor design.** *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 279, 268 ~ 300 (2014).

SÁ, L. F. N.; AMIGO, R. C. R.; NOVOTNY, A. A.; SILVA, E. C. N. **Topological derivatives applied to fluid flow channel design optimization problems.** *Structural and Multidisciplinary Optimization* 54, 249 ~ 264 (2016).

SÁ, L. F. N. **Topology Optimization Method applied to Laminar Flow Machine Rotor Design.** Dissertação de mestrado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo (2016). Disponível em:  
<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3152/tde-16032017-103709/en.php>. Acesso em: 20 abr. 2017.

SAITO, T. S. **CENTRIFUGAL REVERSE FLOW DISK TURBINE AND METHOD TO OBTAIN ROTATIONAL POWER THEREBY.** US 2011/0164958 A1, 7 jul. 2011.

SASTRY, S.; KADAMBI, J. R.; SANKOVIC, J. M.; ISRAELEV, V. **Study Of Flow Field In An Advanced Bladeless Rotary Blood Pump Using Particle Image Velocimetry.** 13th International Symposium on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics, Abstract, #1095 (2006).

SCHOSSER, C.; LECHELER, S.; PFITZNER, M. **A TEST RIG FOR THE INVESTIGATION OF THE PERFORMANCE AND FLOW FIELD.** JProceedings of ASME Turbo Expo 2014: Turbine Technical Conference and Exposition, GT2014-25399 (2014).

SENGUPTA, S.; GUHA, A. **A theory of Tesla disc turbines.** *Journal of Power and Energy* 226(5), 650~663 (2012).

SOKOLOWSKI, J.; ZOCHOWSKY, A. **On Topological Derivative in Shape Optimization.** *SIAM J Control Optim* 37(4), p. 1251 ~ 1272 (1999).

SONG, X. G.; WANG, L.; BAEK, S. H.; PARK, Y. C. **Multidisciplinary optimization of a butterfly valve.** *ISA Transactions*, 48, p. 370 ~ 377 (2009).

SVANBERG, K. **The method of moving asymptotes: a new method for structural optimization.** *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, 359 ~ 373 (1987).

TESLA, N. **Fluid propulsion.** US1,061,142, New York, 6 mai. 1913.

TESLA, N. **Improved Process of and Apparatus for Production of High Vacua.** British Patent # 179,043, 24 mar. 1921.

TESLA, N. **Improvements in the Construction of Steam and Gas Turbines.** British Patent # 186,082, 24 mar. 1921.

TESLA, N. **Turbine.** US1,061,206, New York, 6 mai. 1913.

TRELLEBORG. **O-Rings and Back-up Rings.** Disponível em: <[http://www.tss.trelleborg.com/remotemedia/media/globalformastercontent/download/sautomaticallycreatedbyscript/catalogs/o\\_ring\\_gb\\_en.pdf](http://www.tss.trelleborg.com/remotemedia/media/globalformastercontent/download/sautomaticallycreatedbyscript/catalogs/o_ring_gb_en.pdf)>. Acesso em: 9 jun. 2017.

TUZSON, J. **Centrifugal Pump Design.** 1. ed. Massachusetts: John Wiley & Sons, Inc. 2000.

VAFAI, K. **Handbook of porous media.** 2. ed. CRC Taylor & Francis, 2005.

VEDABRAS. **Manual Prático de Vedação.** 5. ed. Disponível em: <[www.vedabras.com.br/NT\\_sis.php?chave=download&arquivo=catalogo\\_Vedabras.pdf](http://www.vedabras.com.br/NT_sis.php?chave=download&arquivo=catalogo_Vedabras.pdf)>. Acesso em: 18 jul. 2017.

WHITE. **Fluid Mechanics.** 7. ed. New York: McGraw-Hill, 2011.

WÄCHTER, A. **Short Tutorial: Getting Started With Ipopt in 90 Minutes.** Dagstuhl Seminar Proceedings 09061 Combinatorial Scientific Computing (2009).

WÄCHTER, A., BIEGLER, L. T. **On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming.** Math. Program., Ser. A (2005).

WIKER, N.; KLARBRING, A.; BORRVALL, T. **Topology optimization of regions of Darcy and Stokes flow.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, 69, p. 1374 ~ 1404 (2007).

YU, H. **Flow Design Optimization of Blood Pumps Considering Hemolysis.** Dissertação de doutorado. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg (2015).

ZHOU, S.; LI, Q. **A variational level set method for the topology optimization of steady-state Navier–Stokes flow.** Journal of Computational Physics 227, p. 10178 ~ 10195 (2008).

ZHU, B.; ZHANG, X.; FATIKOW, S. **A multi-objective method of hinge-free compliant mechanism optimization.** Structural and Multidisciplinary Optimization (2014) 49, p. 431 ~ 440 (2014).

## APÊNDICE A – Desenvolvimento detalhado do modelo 2D de escoamento girante

A seguir, são mencionados os operadores diferenciais em coordenadas cilíndricas e tem-se o desenvolvimento detalhado das equações desdobradas de modelo 2D de escoamento girante da bomba Tesla em simulação e em otimização topológica.

### A.1 OPERADORES DIFERENCIAIS EM SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICO

Em sistema de coordenadas cilíndrico, os operadores diferenciais gradiente, divergente e rotacional são dados de forma diferente do que em sistema de coordenadas cartesiano e diferem se aplicados em escalar ou em vetor (LAI et al., 2010, p. 60):

$$- \text{Gradiente de escalar: } \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_z \quad (\text{A.1})$$

$$- \text{Gradiente de vetor: } \nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$- \text{Divergente de vetor: } \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{A.3})$$

$$- \text{Rotacional de vetor: } \nabla \wedge \mathbf{v} = \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \cdot \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial (r \cdot v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \cdot \mathbf{e}_z \quad (\text{A.4})$$

## A.2 FORMA FRACA PARA O MODELO 2D DE ESCOAMENTO GIRANTE EM SIMULAÇÃO

A forma fraca do problema 2D de escoamento girante está derivada a seguir usando coordenadas cilíndricas no problema genérico (3D) e, em seguida, simplificando para o modelo 2D de escoamento girante.

### A.2.1 Forma fraca do problema 3D em coordenadas cilíndricas

A forma fraca do problema 3D é dada pelas equações (4.2.3) e (4.2.9):

$$R_{c,j} = \int_{\Pi} [\nabla \cdot \mathbf{v}] \cdot \mathbf{w}_{p,j} \cdot d\Pi \quad (A.5)$$

$$\begin{aligned} R_{m,j} = & \int_{\Pi} [\rho \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{w}_{v,j}) - \rho \cdot \mathbf{f} + 2 \cdot \rho \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}) + \rho \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{s})] \cdot \mathbf{w}_{v,j} \cdot d\Pi \\ & - \oint_{\Gamma_{\Pi}} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}_{v,j}) \cdot \mathbf{n} \cdot d\Gamma_{\Pi} \end{aligned} \quad (A.6)$$

### Produtos vetoriais e escalares

Os produtos vetoriais da equação (A.6) ficam:

$$\begin{aligned} \rightarrow \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{s} &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_{\theta} & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ r & r \cdot \theta & z \end{bmatrix} = \omega_0 \cdot r \cdot \mathbf{e}_{\theta} - \omega_0 \cdot r \cdot \theta \cdot \mathbf{e}_r \\ \Rightarrow \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{s}) &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_{\theta} & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 \cdot r \cdot \theta & \omega_0 \cdot r & 0 \end{bmatrix} = -\omega_0^2 \cdot r \cdot \theta \cdot \mathbf{e}_{\theta} - \omega_0^2 \cdot r \cdot \mathbf{e}_r \end{aligned} \quad (A.7)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_{\theta} & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ v_r & v_{\theta} & v_z \end{bmatrix} = -\omega_0 \cdot v_{\theta} \cdot \mathbf{e}_r + \omega_0 \cdot v_r \cdot \mathbf{e}_{\theta} \quad (A.8)$$

Com as relações (A.2) e (A.3), obtém-se:

- Termo convectivo:

$$\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + v_z \cdot \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ v_r \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + v_z \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ v_r \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \left( v_r \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + v_z \cdot \frac{\partial v_r}{\partial z} \right. ,$$

$$\left. v_r \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + v_z \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right. ,$$

$$\left. v_r \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (A.9)$$

- Tensor de tensões:

$$\rightarrow \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} 2 \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{2}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} & \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} & 2 \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (A.10)$$

$$\rightarrow \mathbf{T} = 2 \cdot \mu \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \right) - p \cdot \mathbf{I}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -p + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} & \mu \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) & \mu \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ \mu \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \right) & -p + 2 \cdot \frac{\mu}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \mu \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \\ \mu \cdot \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) & \mu \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) & -p + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -p + 2.\mu \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} & \mu \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) & \mu \cdot \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ \mu \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) & -p + 2 \cdot \frac{\mu}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \mu \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \\ \mu \cdot \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) & \mu \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) & -p + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

### Desdobramento dos termos da forma fraca do problema 3D

Utilizando-se as equações anteriores, obtém-se:

$$R_{c,j} = \int_{\Pi} \left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \cdot w_{p,j} \cdot d\Pi \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} R_{m,j} = & \int_{\Pi} \left[ \rho \cdot \left[ \left( v_r \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + v_z \cdot \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{e}_r \right. \right. \\ & + \left( v_r \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + v_z \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{e}_\theta \\ & \left. \left. + \left( v_r \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{e}_z \right] \cdot w_{v,j} - \rho \cdot \mathbf{f} \cdot w_{v,j} \right] \cdot d\Pi \\ & + \int_{\Pi} \left[ - (2 \cdot \rho \cdot \omega_0 \cdot v_\theta + \rho \cdot \omega_0^2 \cdot r) \cdot \mathbf{e}_r \right] \cdot w_{v,j} \cdot d\Pi \\ & + \int_{\Pi} \left[ (2 \cdot \rho \cdot \omega_0 \cdot v_r - \rho \cdot \omega_0^2 \cdot \theta \cdot r) \cdot \mathbf{e}_\theta \right] \cdot w_{v,j} \cdot d\Pi \\ & + \int_{\Pi} (\nabla w_{v,j}) \cdot \mathbf{T} \cdot d\Pi - \oint_{\Gamma_{\Pi}} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}_{v,j}) \cdot \mathbf{n} \cdot d\Gamma_{\Pi} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Separando-se (A.13) em suas 3 componentes  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  (

$$R_{m,j} = R_{m,j,r} + R_{m,j,\theta} + R_{m,j,z},$$

- Em  $r$ ,

$$\begin{aligned} R_{m,j,r} = & \int_{\Pi} \left[ \rho \cdot \left( v_r \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + v_z \cdot \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \cdot w_{v,j,r} - \rho \cdot f_r \cdot w_{v,j,r} \right] \cdot d\Pi \\ & - \int_{\Pi} \left[ (2 \cdot \rho \cdot \omega_0 \cdot v_\theta + \rho \cdot \omega_0^2 \cdot r) \cdot w_{v,j,r} \right] \cdot d\Pi \\ & + \int_{\Pi} ((\nabla w_{v,j}) \cdot \mathbf{T})_r \cdot d\Pi - \oint_{\Gamma_{\Pi}} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_r \cdot w_{v,j,r} \cdot d\Gamma_{\Pi} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

- Em  $\theta$ ,

$$\begin{aligned}
 R_{m,j,\theta} = & \int_{\Pi} \left[ \rho \cdot \left( v_r \cdot \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + v_r \right) + v_z \cdot \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} \right) \cdot w_{v,j,\theta} - \rho \cdot f_{\theta} \cdot w_{v,j,\theta} \right] \cdot d\Pi \\
 & + \int_{\Pi} \left[ (2 \cdot \rho \cdot \omega_0 \cdot v_r - \rho \cdot \omega_0^2 \cdot \theta \cdot r) \cdot w_{v,j,\theta} \right] \cdot d\Pi \\
 & + \int_{\Pi} ((\nabla w_{v,j}) \cdot \mathbf{T})_{\theta} \cdot d\Omega - \oint_{\Gamma_{\Pi}} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_{\theta} \cdot w_{v,j,\theta} \cdot d\Gamma_{\Pi}
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

- Em  $z$ ,

$$\begin{aligned}
 R_{m,j,z} = & \int_{\Pi} \left[ \rho \cdot \left( v_r \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \cdot w_{v,j,z} - \rho \cdot f_z \cdot w_{v,j,z} \right] \cdot d\Pi \\
 & + \int_{\Pi} ((\nabla w_{v,j}) \cdot \mathbf{T})_z \cdot d\Pi - \oint_{\Gamma_{\Pi}} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_z \cdot w_{v,j,z} \cdot d\Gamma_{\Pi}
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

### Desdobramento da função peso

Pela equação (A.1), o gradiente do vetor  $w_{v,j} = \begin{bmatrix} w_{v,j,r} \\ w_{v,j,\theta} \\ w_{v,j,z} \end{bmatrix}$  fica:

$$\nabla w_{v,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_{v,j,r}}{\partial r} & \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial w_{v,j,r}}{\partial \theta} - w_{v,j,\theta} \right) & \frac{\partial w_{v,j,r}}{\partial z} \\ \frac{\partial w_{v,j,\theta}}{\partial r} & \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial w_{v,j,\theta}}{\partial \theta} + w_{v,j,r} \right) & \frac{\partial w_{v,j,\theta}}{\partial z} \\ \frac{\partial w_{v,j,z}}{\partial r} & \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w_{v,j,z}}{\partial \theta} & \frac{\partial w_{v,j,z}}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{A.17}$$

Substituindo-se (A.11) e (A.17) em  $(\nabla w_{v,j}) \cdot \mathbf{T}$  (da equação (A.13)), obtém-se:

$$\begin{aligned}
(\nabla w_{v,j}) \cdot T = & \\
& \left( -p + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \cdot \frac{\partial w_{v,j,r}}{\partial r} + \left[ \mu \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) \right] \cdot \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial w_{v,j,r}}{\partial \theta} - w_{v,j,\theta} \right) \\
& + \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right] \cdot \frac{\partial w_{v,j,r}}{\partial z} + \left[ \mu \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) \right] \cdot \frac{\partial w_{v,j,\theta}}{\partial r} \\
& + \left[ -p + 2 \cdot \frac{\mu}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \right] \cdot \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial w_{v,j,\theta}}{\partial \theta} + w_{v,j,r} \right) + \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \right] \cdot \frac{\partial w_{v,j,\theta}}{\partial z} \\
& + \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right] \cdot \frac{\partial w_{v,j,z}}{\partial r} + \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \right] \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial w_{v,j,z}}{\partial \theta} \\
& + \left[ -p + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \cdot \frac{\partial w_{v,j,z}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Separando-se os termos que incluem os pesos  $w_{v,j,r}$ ,  $w_{v,j,\theta}$  e  $w_{v,j,z}$  para, respectivamente,  $r$ ,  $\theta$  e  $z$ ,

$$\begin{aligned}
(\nabla w_{v,j}) \cdot T = & \\
& \left[ \left( -p + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \cdot \frac{\partial w_{v,j,r}}{\partial r} + \left( \mu \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) \right) \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w_{v,j,r}}{\partial \theta} \right. \\
& \left. + \left( -p + 2 \cdot \frac{\mu}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \right) \cdot \frac{w_{v,j,r}}{r} + \left( \mu \cdot \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right) \cdot \frac{\partial w_{v,j,r}}{\partial z} \right] \text{parte de } \mathbf{r} \\
& + \left[ \left( \mu \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) \right) \cdot \left( \frac{\partial w_{v,j,\theta}}{\partial r} - \frac{w_{v,j,\theta}}{r} \right) \right. \\
& \left. + \left( -p + 2 \cdot \frac{\mu}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \right) \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w_{v,j,\theta}}{\partial \theta} + \left( \mu \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \right) \cdot \frac{\partial w_{v,j,\theta}}{\partial z} \right] \text{parte de } \theta \\
& + \left[ \left( \mu \cdot \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right) \cdot \frac{\partial w_{v,j,z}}{\partial r} + \left( \mu \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \right) \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial w_{v,j,z}}{\partial \theta} \right. \\
& \left. + \left( -p + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial w_{v,j,z}}{\partial z} \right] \text{parte de } \mathbf{z}
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Substituindo-se (A.19) nas equações (A.14) a (A.16),

- Em  $r$ ,

$$\begin{aligned}
 R_{m,j,r} = & \int_{\Pi} \left[ \rho \cdot \left( v_r \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_{\theta} \right) + v_z \cdot \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \cdot w_{v,j,r} - \rho \cdot f_r \cdot w_{v,j,r} \right] \cdot d\Pi \\
 & - \int_{\Pi} [2 \cdot \rho \cdot \omega_0 \cdot v_{\theta} + \rho \cdot \omega_0^2 \cdot r] \cdot w_{v,j,r} \cdot d\Pi \\
 & + \int_{\Pi} \left[ \left( -p + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \cdot \frac{\partial w_{v,j,r}}{\partial r} + \left( \mu \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_{\theta} \right) + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} \right) \right) \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w_{v,j,r}}{\partial \theta} \right. \\
 & \quad \left. + \left( -p + 2 \cdot \frac{\mu}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + v_r \right) \right) \cdot \frac{w_{v,j,r}}{r} + \left( \mu \cdot \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right) \cdot \frac{\partial w_{v,j,r}}{\partial z} \right] \cdot d\Pi \\
 & - \oint_{\Gamma_{\Pi}} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_r \cdot w_{v,j,r} \cdot d\Gamma_{\Pi}
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

- Em  $\theta$ ,

$$\begin{aligned}
 R_{m,j,\theta} = & \int_{\Pi} \left[ \rho \cdot \left( v_r \cdot \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + v_r \right) + v_z \cdot \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} \right) \cdot w_{v,j,\theta} - \rho \cdot f_{\theta} \cdot w_{v,j,\theta} \right] \cdot d\Pi \\
 & + \int_{\Pi} [2 \cdot \rho \cdot \omega_0 \cdot v_r - \rho \cdot \omega_0^2 \cdot \theta \cdot r] \cdot w_{v,j,\theta} \cdot d\Pi \\
 & + \int_{\Pi} \left[ \left( \mu \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_{\theta} \right) + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} \right) \right) \cdot \left( \frac{\partial w_{v,j,\theta}}{\partial r} - \frac{w_{v,j,\theta}}{r} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \left( -p + 2 \cdot \frac{\mu}{r} \cdot \left( \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + v_r \right) \right) \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w_{v,j,\theta}}{\partial \theta} + \left( \mu \cdot \left( \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \right) \cdot \frac{\partial w_{v,j,\theta}}{\partial z} \right] \cdot d\Pi \\
 & - \oint_{\Gamma_{\Pi}} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_{\theta} \cdot w_{v,j,\theta} \cdot d\Gamma_{\Pi}
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

- Em  $z$ ,

$$\begin{aligned}
 R_{m,j,z} = & \int_{\Pi} \left[ \rho \cdot \left( v_r \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \cdot w_{v,j,z} - \rho \cdot f_z \cdot w_{v,j,z} \right] \cdot d\Pi \\
 & + \int_{\Pi} \left[ \left( \mu \cdot \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right) \cdot \frac{\partial w_{v,j,z}}{\partial r} + \left( \mu \cdot \left( \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \right) \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w_{v,j,z}}{\partial \theta} \right. \\
 & \quad \left. + \left( -p + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial w_{v,j,z}}{\partial z} \right] \cdot d\Pi \\
 & - \oint_{\Gamma_{\Pi}} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_z \cdot w_{v,j,z} \cdot d\Gamma_{\Pi}
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

### A.2.1 Forma fraca do problema 2D de escoamento girante

Considerando-se modelo 2D de escoamento girante,

$$\hat{R}_{c,j} = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \cdot w_{p,j} \cdot r \cdot d\Omega \quad (\text{A.23})$$

- Em  $r$ ,

$$\begin{aligned} \hat{R}_{m,j,r} = & \int_{\Omega} \left[ \rho \cdot \left( v_r \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \cdot \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) \cdot w_{v,j,r} + \left( -p + 2\mu \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \cdot \frac{\partial w_{v,j,r}}{\partial r} \right. \\ & + \left( -p + 2\mu \frac{v_r}{r} \right) \cdot \frac{w_{v,j,r}}{r} + \mu \cdot \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial w_{v,j,r}}{\partial z} \\ & - \rho \cdot f_r \cdot w_{v,j,r} - 2\mu \cdot \omega_0 \cdot v_\theta \cdot w_{v,j,r} \left. \right] \cdot r \cdot d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \rho \cdot \omega_0^2 \cdot r^2 \cdot w_{v,j,r} \cdot d\Omega - \oint_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_r \cdot w_{v,j,r} \cdot r \cdot d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

- Em  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} \hat{R}_{m,j,\theta} = & \int_{\Omega} \left[ \rho \cdot \left( v_r \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_\theta \cdot v_r}{r} \right) \cdot w_{v,j,\theta} \right. \\ & + \mu \cdot \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \cdot \left( \frac{\partial w_{v,j,\theta}}{\partial r} - \frac{w_{v,j,\theta}}{r} \right) \\ & + \mu \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \cdot \frac{\partial w_{v,j,\theta}}{\partial z} - \rho \cdot f_\theta \cdot w_{v,j,\theta} + 2\mu \cdot \omega_0 \cdot v_r \cdot w_{v,j,\theta} \left. \right] \cdot r \cdot d\Omega \\ & - \oint_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_\theta \cdot w_{v,j,\theta} \cdot r \cdot d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

- Em  $z$ ,

$$\begin{aligned} \hat{R}_{m,j,z} = & \int_{\Omega} \left[ \rho \cdot \left( v_r \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \cdot w_{v,j,z} + \mu \cdot \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial w_{v,j,z}}{\partial r} \right. \\ & + \left( -p + 2\mu \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial w_{v,j,z}}{\partial z} - \rho \cdot f_z \cdot w_{v,j,z} \left. \right] \cdot r \cdot d\Omega \\ & - \oint_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_z \cdot w_{v,j,z} \cdot r \cdot d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Nas equações (A.24), (A.25) e (A.26), pode-se perceber a contribuição de cada termo separadamente na forma fraca do problema, tal como as forças inerciais causadas pelo referencial rotativo, a viscosidade e o movimento do fluido.

### A.3 FORMA FRACA PARA O MODELO 2D DE ESCOAMENTO GIRANTE EM OTIMIZAÇÃO TOPOLOGÍGICA

As equações de Navier-Stokes para sistema de referência rotativo segundo o modelo Brinkman são dadas pela equação (4.5.13):

$$\hat{R}_{m,j} = \int_{\Omega} [\rho \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{w}_{v,j}) - \rho \cdot \mathbf{f} + 2 \cdot \rho \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}) + \rho \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{s})] \cdot \mathbf{w}_{v,j} \cdot r \cdot d\Omega$$

$$- \oint_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}_{v,j}) \cdot \mathbf{n} \cdot r \cdot d\Gamma + \int_{\Omega_a} \kappa(\alpha) \cdot \mathbf{v}_{rel} \cdot \mathbf{w}_{v,j} \cdot r \cdot d\Omega_a$$
(A.27)

Desdobrando-se a equação acima, obtém-se:

- Em  $r$ ,

$$\hat{R}_{m,j,r} = \int_{\Omega} \left[ \rho \cdot \left( v_r \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \cdot \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) \cdot w_{v,j,r} + \left( -p + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \cdot \frac{\partial w_{v,j,r}}{\partial r} \right. \\ \left. + \left( -p + 2 \cdot \mu \cdot \frac{v_r}{r} \right) \cdot \frac{w_{v,j,r}}{r} + \mu \cdot \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial w_{v,j,r}}{\partial z} \right. \\ \left. - \rho \cdot f_r \cdot w_{v,j,r} - 2 \cdot \rho \cdot \omega_0 \cdot v_\theta \cdot w_{v,j,r} \right] \cdot r \cdot d\Omega$$

$$- \int_{\Omega} \rho \cdot \omega_0^2 \cdot r^2 \cdot w_{v,j,r} \cdot d\Omega - \oint_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_r \cdot w_{v,j,r} \cdot r \cdot d\Gamma$$

$$+ \int_{\Omega_a} \kappa_r(\alpha) \cdot v_{rel,r} \cdot w_{v,j,r} \cdot r \cdot d\Omega_a$$
(A.28)

- Em  $\theta$ ,

$$\begin{aligned}
 \hat{R}_{m,j,\theta} = & \int_{\Omega} \left[ \rho \cdot \left( v_r \cdot \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + v_z \cdot \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} + \frac{v_{\theta} \cdot v_r}{r} \right) \cdot w_{v,j,\theta} \right. \\
 & + \mu \cdot \left( \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - \frac{v_{\theta}}{r} \right) \cdot \left( \frac{\partial w_{v,j,\theta}}{\partial r} - \frac{w_{v,j,\theta}}{r} \right) \\
 & + \mu \cdot \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} \cdot \frac{\partial w_{v,j,\theta}}{\partial z} - \rho \cdot f_{\theta} \cdot w_{v,j,\theta} + 2 \cdot \rho \cdot \omega_0 \cdot v_r \cdot w_{v,j,\theta} \left. \right] \cdot r \cdot d\Omega \\
 & - \oint_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_{\theta} \cdot w_{v,j,\theta} \cdot r \cdot d\Gamma + \int_{\Omega_a} \kappa_{\theta}(\alpha) \cdot v_{rel,\theta} \cdot w_{v,j,\theta} \cdot r \cdot d\Omega_a
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

- Em  $z$ ,

$$\begin{aligned}
 \hat{R}_{m,j,z} = & \int_{\Omega} \left[ \rho \cdot \left( v_r \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \cdot w_{v,j,z} + \mu \cdot \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial w_{v,j,z}}{\partial r} \right. \\
 & + \left( -p + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial w_{v,j,z}}{\partial z} - \rho \cdot f_z \cdot w_{v,j,z} \left. \right] \cdot r \cdot d\Omega \\
 & - \oint_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_z \cdot w_{v,j,z} \cdot r \cdot d\Gamma + \int_{\Omega_a} \kappa_z(\alpha) \cdot v_{rel,z} \cdot w_{v,j,z} \cdot r \cdot d\Omega_a
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

## APÊNDICE B – Formas discretas no modelo 2D de escoamento girante

A seguir estão descritas as formas discretas da forma fraca e das funções objetivo no modelo 2D de escoamento girante, assim como as suas derivadas/sensibilidades. A plataforma FEniCS gera de forma automatizada essas formas discretas. Por simplicidade, as submatrizes estão expressas usando notação indicial (de Einstein).

### B.1 FORMA DISCRETA DA FORMULAÇÃO FRACA

#### B.1.1 Forma discreta

Utilizando as equações (4.2.21) a (4.2.24) e o Método de Galerkin ( $w_{p,j} = \chi_j$  e  $w_{v,j,r} = w_{v,j,\theta} = w_{v,j,z} = \phi_j$ ) nas equações (A.27) a (A.30),

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_G \cdot \mathbf{z} + \mathbf{K}_{G,\kappa} \cdot \mathbf{z}_{rel} - \mathbf{F}_c = \mathbf{0} \quad (\text{B.1})$$

em que

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{m,r} \\ \mathbf{R}_{m,\theta} \\ \mathbf{R}_{m,z} \\ \mathbf{R}_c \end{bmatrix} : \text{Forma fraca do problema separada em 4 componentes}$$

de resíduo.

$\mathbf{K}_G = \mathbf{K}_{G,s} + \mathbf{K}_{G,A} + \mathbf{K}_{G,r}$  : Matriz global relativa às variáveis de estado, em que  $\mathbf{K}_{G,s}$ ,  $\mathbf{K}_{G,A}$ ,  $\mathbf{K}_{G,r}$  são, respectivamente, as suas partes simétrica, assimétrica e devida à rotação do referencial:

$$\mathbf{K}_{G,s} = \begin{bmatrix} K_{G1} & \mathbf{0} & K_{G2} & -Q_1 \\ \mathbf{0} & K_{G3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ K_{G2} & \mathbf{0} & K_{G4} & -Q_2 \\ -Q_1^T & \mathbf{0} & -Q_2^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$K_{G1} \rightarrow K_{G1,i,j} = \int_{\Omega} \left( 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\phi_i \cdot \phi_j}{r^2} + \mu \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) \cdot r \cdot d\Omega$$

$$K_{G2} \rightarrow K_{G2,i,j} = \int_{\Omega} \left( \mu \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \right) \cdot r \cdot d\Omega$$

$$K_{G3} \rightarrow K_{G3,i,j} = \int_{\Omega} \left( \mu \cdot \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial r} - \frac{\phi_i}{r} \right) \cdot \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial r} - \frac{\phi_j}{r} \right) + \mu \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) \cdot r \cdot d\Omega$$

$$K_{G4} \rightarrow K_{G4,i,j} = \int_{\Omega} \left( \mu \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) \cdot r \cdot d\Omega$$

$$Q_1 \rightarrow Q_{1,i,j} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\phi_j}{r} \right) \cdot \chi_i \cdot r \cdot d\Omega$$

$$Q_2 \rightarrow Q_{2,i,j} = \int_{\Omega} \chi_i \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \cdot r \cdot d\Omega$$

$$K_{G,A} = \begin{bmatrix} C_{G1} & C_{G2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ C_{G3} & C_{G4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ C_{G5} & \mathbf{0} & C_{G4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$C_{G1}(\mathbf{z}) \rightarrow C_{G1,i,j} = \int_{\Omega} \rho \cdot \left( v_{r,j} \cdot \phi_i \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + v_{z,j} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right) \cdot \phi_j \cdot r \cdot d\Omega$$

$$C_{G2}(\mathbf{z}) \rightarrow C_{G2,i,j} = - \int_{\Omega} \rho \cdot v_{\theta,j} \frac{\phi_i \cdot \phi_j}{r} \cdot \phi_j \cdot r \cdot d\Omega$$

$$C_{G3}(\mathbf{z}) \rightarrow C_{G3,i,j} = \int_{\Omega} \rho \cdot \left( v_{\theta,j} \cdot \phi_i \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + v_{\theta,j} \cdot \frac{\phi_i \cdot \phi_j}{r} \right) \cdot \phi_j \cdot r \cdot d\Omega$$

$$C_{G4}(\mathbf{z}) \rightarrow C_{G4,i,j} = \int_{\Omega} \rho \cdot v_{z,j} \cdot \phi_i \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \cdot \phi_j \cdot r \cdot d\Omega$$

$$C_{G5}(\mathbf{z}) \rightarrow C_{G5,i,j} = \int_{\Omega} \rho \cdot v_{z,j} \cdot \phi_i \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \cdot \phi_j \cdot r \cdot d\Omega$$

$$K_{G,r} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -K_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ K_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$K_r \rightarrow K_{r,i,j} = \int_{\Omega} 2 \cdot \rho \cdot \omega_0 \cdot \phi_i \cdot \phi_j \cdot r \cdot d\Omega$$

$$K_{G,\kappa} = \begin{bmatrix} K_{\kappa,r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{\kappa,\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{\kappa,z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \text{Matriz do modelo de material.}$$

$$K_{\kappa,r} \rightarrow K_{\kappa,r, i,j} = \int_{\Omega} \kappa_r(\alpha) \cdot \phi_i \cdot \phi_j \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$$

$$K_{\kappa,\theta} \rightarrow K_{\kappa,\theta, i,j} = \int_{\Omega} \kappa_{\theta}(\alpha) \cdot \phi_i \cdot \phi_j \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$$

$$K_{\kappa,z} \rightarrow K_{\kappa,z, i,j} = \int_{\Omega} \kappa_z(\alpha) \cdot \phi_i \cdot \phi_j \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$$

$$F_C = \begin{bmatrix} F_{C1} \\ F_{C2} \\ F_{C3} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} : \text{Matriz de força, composta pelas forças de corpo, forças}$$

de Coriolis, forças iniciais centrífugas e o termo de contorno:

$$F_{C1} \rightarrow F_{C1, i,j} = \int_{\Omega} \rho \cdot f_r \cdot \phi_j \cdot r \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \rho \cdot \omega_0^2 \cdot r^2 \cdot \phi_j \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_r \cdot \phi_j \cdot r \cdot d\Gamma$$

$$F_{C2} \rightarrow F_{C2, i,j} = \int_{\Omega} \rho \cdot f_{\theta} \cdot \phi_j \cdot r \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_{\theta} \cdot \phi_j \cdot r \cdot d\Gamma$$

$$F_{C3} \rightarrow F_{C3, i,j} = \int_{\Omega} \rho \cdot f_z \cdot \phi_j \cdot r \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_z \cdot \phi_j \cdot r \cdot d\Gamma$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_r \\ \mathbf{v}_{\theta} \\ \mathbf{v}_z \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}_{(3n+m) \times 1} : \text{Vetor de valores nodais das variáveis de estado.}$$

$$\mathbf{z}_{rel} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{rel,r} \\ \mathbf{v}_{rel,\theta} \\ \mathbf{v}_{rel,z} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_r - \omega_m \cdot \mathbf{r} \\ \mathbf{v}_{\theta} \\ \mathbf{v}_z \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} : \text{Velocidades nodais relativas ao}$$

modelo de material (conforme a definição de  $\mathbf{v}_{rel}$  na equação (4.5.1)).

A equação (B.1) também pode ser dada por:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_G' \cdot \mathbf{z} - \mathbf{F}_c' = \mathbf{0} \quad (\text{B.2})$$

em que

$$K_G' = K_G + C_k$$

$$F_c' = F_c + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ K_{\theta} \cdot \omega_m \cdot r \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Note que, acima, se  $\omega_m = 0$ ,  $F_c' = F_c$ .

### B.1.2 Resolução da forma fraca do problema na forma discreta

Para resolver as equações da forma fraca do problema, foi utilizado o método de Newton-Raphson. Aplicando-se o método de Newton-Raphson na equação (B.1) para todos os nós, o Jacobiano se torna:

$$J_F = \frac{dF}{dz} \approx \frac{\mathbf{0} - F}{\Delta z} \Rightarrow J_F = -\frac{F}{\Delta z} \quad (B.3)$$

Portanto,

$$J_F \cdot \Delta z = -F \Rightarrow \Delta z = -J_F^{-1} \cdot F \quad (B.4)$$

Para cada iteração  $k$ ,

$$\Delta z^k = -(J_F^k)^{-1} \cdot F^k \quad (B.5)$$

Substituindo-se  $z^{k+1} = z^k + \Delta z^k$  na equação acima, a equação do método de Newton-Raphson pode ser enunciada como:

$$z^{k+1} = z^k - (J_F^k)^{-1} \cdot F^k$$

(B.6)

O Jacobiano da forma discreta das equações da forma fraca  $\mathbf{J}_F = \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{z}}$  é dado por:

$$\mathbf{J}_F = \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{R}_{m,r}}{d\mathbf{z}} \\ \frac{d\mathbf{R}_{m,\theta}}{d\mathbf{z}} \\ \frac{d\mathbf{R}_{m,z}}{d\mathbf{z}} \\ \frac{d\mathbf{R}_c}{d\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_{m,r}}{\partial \mathbf{v}_r} & \frac{\partial \mathbf{R}_{m,r}}{\partial \mathbf{v}_\theta} & \frac{\partial \mathbf{R}_{m,r}}{\partial \mathbf{v}_z} & \frac{\partial \mathbf{R}_{m,r}}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_{m,\theta}}{\partial \mathbf{v}_r} & \frac{\partial \mathbf{R}_{m,\theta}}{\partial \mathbf{v}_\theta} & \frac{\partial \mathbf{R}_{m,\theta}}{\partial \mathbf{v}_z} & \frac{\partial \mathbf{R}_{m,\theta}}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_{m,z}}{\partial \mathbf{v}_r} & \frac{\partial \mathbf{R}_{m,z}}{\partial \mathbf{v}_\theta} & \frac{\partial \mathbf{R}_{m,z}}{\partial \mathbf{v}_z} & \frac{\partial \mathbf{R}_{m,z}}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial \mathbf{v}_r} & \frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial \mathbf{v}_\theta} & \frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial \mathbf{v}_z} & \frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad (B.7)$$

Utilizando as equações (4.2.21) a (4.2.24) e o Método de Galerkin ( $w_{p,j} = \chi_j$  e  $w_{v,j,r} = w_{v,j,\theta} = w_{v,j,z} = \phi_j$ ) nas equações (A.27) a (A.29),

$$- \frac{\partial \mathbf{R}_{m,r}}{\partial \mathbf{z}} \rightarrow \frac{\partial \hat{R}_{m,i,r}}{\partial z_{k,j}} \quad (B.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_{m,r}}{\partial \mathbf{v}_r} \rightarrow \frac{\partial \hat{R}_{m,i,r}}{\partial v_{r,j}} &= \int_{\Omega} \left[ \rho \cdot \left( v_r \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) \cdot \phi_i \right. \\ &\quad + \left( 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \right) \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \left( 2 \cdot \mu \cdot \frac{\phi_j}{r} \right) \cdot \frac{\phi_i}{r} + \mu \cdot \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \left. \right] \cdot r \cdot d\Omega \\ &\quad - \oint_{\Gamma} \frac{\partial (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_r}{\partial v_{r,j}} \cdot \phi_i \cdot r \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} \kappa_r(\alpha) \cdot \phi_j \phi_i \cdot r \cdot d\Omega \end{aligned} \quad (B.8a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_{m,r}}{\partial \mathbf{v}_\theta} \rightarrow \frac{\partial \hat{R}_{m,i,r}}{\partial v_{\theta,j}} &= \int_{\Omega} \left[ \rho \cdot \left( -2 \cdot \frac{v_\theta}{r} \cdot \phi_j \right) \cdot \phi_i - 2 \cdot \rho \cdot \omega_0 \cdot \phi_j \cdot \phi_i \right] \cdot r \cdot d\Omega \\ &\quad - \oint_{\Gamma} \frac{\partial (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_r}{\partial v_{\theta,j}} \cdot \phi_i \cdot r \cdot d\Gamma \end{aligned} \quad (B.8b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_{m,r}}{\partial \mathbf{v}_z} \rightarrow \frac{\partial \hat{R}_{m,i,r}}{\partial v_{z,j}} = & \int_{\Omega} \left[ \rho \cdot \frac{\partial v_r}{\partial z} \cdot \phi_j \cdot \phi_i + \mu \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right] \cdot r \cdot d\Omega \\ & - \oint_{\Gamma} \frac{\partial (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_r}{\partial v_{z,j}} \cdot \phi_i \cdot r \cdot d\Gamma \end{aligned} \quad (B.8c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_{m,r}}{\partial \mathbf{p}} \rightarrow \frac{\partial \hat{R}_{m,i,r}}{\partial p_j} = & \int_{\Omega} \left[ - \chi_j \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial r} - \chi_j \cdot \frac{\phi_i}{r} \right] \cdot r \cdot d\Omega \\ & - \oint_{\Gamma} \frac{\partial (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_r}{\partial p_j} \cdot \phi_i \cdot r \cdot d\Gamma \end{aligned} \quad (B.8d)$$

$$- \frac{\partial \mathbf{R}_{m,\theta}}{\partial \mathbf{z}} \rightarrow \frac{\partial \hat{R}_{m,i,\theta}}{\partial z_{k,j}} \quad (B.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_{m,\theta}}{\partial \mathbf{v}_r} \rightarrow \frac{\partial \hat{R}_{m,i,\theta}}{\partial v_{r,j}} = & \int_{\Omega} \left[ \rho \cdot \left( \phi_j \cdot \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{v_{\theta} \cdot \phi_j}{r} \right) \cdot \phi_i \right. \\ & \left. + 2 \cdot \rho \cdot \omega_0 \cdot v_r \cdot \phi_i \right] \cdot r \cdot d\Omega \\ & - \oint_{\Gamma} \frac{\partial (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_{\theta}}{\partial v_{r,j}} \cdot \phi_i \cdot r \cdot d\Gamma \end{aligned} \quad (B.9a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_{m,\theta}}{\partial \mathbf{v}_{\theta}} \rightarrow \frac{\partial \hat{R}_{m,i,\theta}}{\partial v_{\theta,j}} = & \int_{\Omega} \left[ \rho \cdot \left( v_r \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + v_z \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial z} + \frac{\phi_j \cdot v_r}{r} \right) \cdot \phi_i \right. \\ & \left. + \mu \cdot \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial r} - \frac{\phi_j}{r} \right) \cdot \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial r} - \frac{\phi_i}{r} \right) + \mu \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right] r \cdot d\Omega \\ & - \oint_{\Gamma} \frac{\partial (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_{\theta}}{\partial v_{\theta,j}} \cdot \phi_i \cdot r \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} \kappa_{\theta}(\alpha) \cdot \phi_j \cdot \phi_i \cdot r \cdot d\Omega \end{aligned} \quad (B.9b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_{m,\theta}}{\partial \mathbf{v}_z} \rightarrow \frac{\partial \hat{R}_{m,i,\theta}}{\partial v_{z,j}} = & \int_{\Omega} \left[ \rho \cdot \left( \phi_j \cdot \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} \right) \cdot \phi_i \right] \cdot r \cdot d\Omega \\ & - \oint_{\Gamma} \frac{\partial (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_{\theta}}{\partial v_{z,j}} \cdot \phi_i \cdot r \cdot d\Gamma \end{aligned} \quad (B.9c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{m,\theta}}{\partial \mathbf{p}} \rightarrow \frac{\partial \hat{R}_{m,i,\theta}}{\partial p_j} = - \oint_{\Gamma} \frac{\partial (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_{\theta}}{\partial p_j} \cdot \phi_i \cdot r \cdot d\Gamma \quad (B.9d)$$

$$- \frac{\partial \mathbf{R}_{m,z}}{\partial \mathbf{z}} \rightarrow \frac{\partial \hat{R}_{m,i,z}}{\partial z_{k,j}} \quad (B.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_{m,z}}{\partial \mathbf{v}_r} \rightarrow \frac{\partial \hat{R}_{m,i,z}}{\partial v_{r,j}} = & \int_{\Omega} \left[ \rho \cdot \left( \phi_j \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \cdot \phi_i + \mu \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right] \cdot r \cdot d\Omega \\ & - \oint_{\Gamma} \frac{\partial (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_z}{\partial v_{r,j}} \cdot \phi_i \cdot r \cdot d\Gamma \end{aligned} \quad (B.10a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{m,z}}{\partial \mathbf{v}_\theta} \rightarrow \frac{\partial \hat{R}_{m,i,z}}{\partial v_{\theta,j}} = - \oint_\Gamma \frac{\partial(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_z}{\partial v_{\theta,j}} \cdot \phi_i \cdot r \cdot d\Gamma \quad (\text{B.10b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_{m,z}}{\partial \mathbf{v}_z} \rightarrow \frac{\partial \hat{R}_{m,i,z}}{\partial v_{z,j}} &= \int_\Omega \left[ \rho \cdot \left( v_r \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + v_z \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial z} + \phi_j \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \cdot \phi_i \right. \\ &\quad \left. + \mu \cdot \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \right) \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \left( 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right] \cdot r \cdot d\Omega \\ &\quad - \oint_\Gamma \frac{\partial(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_z}{\partial v_{z,j}} \cdot \phi_i \cdot r \cdot d\Gamma + \int_\Omega \kappa_z(\alpha) \cdot \phi_j \cdot \phi_i \cdot r \cdot d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.10c})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_{m,z}}{\partial \mathbf{p}} \rightarrow \frac{\partial \hat{R}_{m,i,z}}{\partial p_j} &= \int_\Omega \left[ - \chi_j \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right] \cdot r \cdot d\Omega \\ &\quad - \oint_\Gamma \frac{\partial(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_z}{\partial p_j} \cdot \phi_i \cdot r \cdot d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{B.10d})$$

$$- \frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial \mathbf{z}} \rightarrow \frac{\partial \hat{R}_c}{\partial z_{k,j}} \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial \mathbf{v}_r} \rightarrow \frac{\partial \hat{R}_{c,i}}{\partial v_{r,j}} = \int_\Omega \left[ \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\phi_j}{r} \right] \cdot \chi_i \cdot r \cdot d\Omega \quad (\text{B.11a})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial \mathbf{v}_\theta} \rightarrow \frac{\partial \hat{R}_{c,i}}{\partial v_{\theta,j}} = 0 \quad (\text{B.11b})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial \mathbf{v}_z} \rightarrow \frac{\partial \hat{R}_{c,i}}{\partial v_{z,j}} = \int_\Omega \left[ \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right] \cdot \chi_i \cdot r \cdot d\Omega \quad (\text{B.11c})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial \mathbf{p}} \rightarrow \frac{\partial \hat{R}_{c,i}}{\partial p_j} = 0 \quad (\text{B.11d})$$

## B.2 FORMA DISCRETA DAS FUNÇÕES OBJETIVO

### B.2.1 Dissipação de energia

A equação (4.5.18) pode ser representada na forma matricial para todos os nós (utilizando-se (4.2.21) a (4.2.24)),

$$\Phi_{rel} = \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{C}_f \cdot \mathbf{z} + \mathbf{z}_{rel}^T \cdot \mathbf{C}_\kappa \cdot \mathbf{z} \quad (\text{B.12})$$

em que

$$C = \begin{bmatrix} 2 \cdot K_1 + K_2 - \frac{2}{3} K_5 & 0 & K_4 - \frac{2}{3} K_6 & 0 \\ 0 & K_3 + K_2 & 0 & 0 \\ K_4 - \frac{2}{3} K_6 & 0 & 2 \cdot K_2 + K_1 - \frac{2}{3} K_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \text{Matriz}$$

de dissipação viscosa.

$$K_1 \rightarrow K_{1, i,j} = \int_{\Omega} \mu \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$$

$$K_2 \rightarrow K_{2, i,j} = \int_{\Omega} \mu \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$$

$$K_3 \rightarrow K_{3, i,j} = \int_{\Omega} \mu \cdot \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial r} - \frac{\phi_i}{r} \right) \cdot \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial r} - \frac{\phi_j}{r} \right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$$

$$K_4 \rightarrow K_{4, i,j} = \int_{\Omega} \mu \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$$

$$K_5 \rightarrow K_{5, i,j} = \int_{\Omega} \mu \cdot \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \frac{\phi_i}{r} \right) \cdot \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\phi_j}{r} \right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$$

$$K_6 \rightarrow K_{6, i,j} = \int_{\Omega} \mu \cdot \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \frac{\phi_i}{r} \right) \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$$

$$C_f = \begin{bmatrix} F_{f1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{f2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{f3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \text{Matriz de forças de corpo.}$$

$$F_{f1} \rightarrow F_{f1, i} = \int_{\Omega} \rho \cdot f_r \phi_i \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$$

$$F_{f2} \rightarrow F_{f2, i} = \int_{\Omega} \rho \cdot f_{\theta} \cdot \phi_i \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$$

$$F_{f3} \rightarrow F_{f3, i} = \int_{\Omega} \rho \cdot f_z \cdot \phi_i \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$$

$$C_{\kappa} = 2 \cdot \pi \cdot K_{G, \kappa} : \text{Matriz do modelo de material (da equação (B.1))}$$

multiplicada por  $2 \cdot \pi$ .

A equação (B.12) pode ser dada também por:

$$\Phi_{rel} = \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{C}' \cdot \mathbf{z} + \mathbf{C}_f' \cdot \mathbf{z} \quad (\text{B.13})$$

em que

$$C' = C + C_{\kappa}$$

$$C_f' = C_f + \begin{bmatrix} 0 \\ K_{\kappa, \theta} \cdot \omega_m \cdot r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Note que, se  $\omega_m = 0$ ,  $C_f' = C_f$ .

### B.2.2 Potência

A equação (4.5.22) pode ser representada na forma matricial para todos os nós (utilizando-se (4.2.21) a (4.2.24)),

$$P_f = \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{M}_P \cdot \mathbf{z} + \mathbf{M}_{\kappa} \cdot \mathbf{z}_{rel} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{z} + F_P \quad (\text{B.14})$$

em que

$$\mathbf{M}_P = \begin{bmatrix} 0 & K_{P1} & 0 & 0 \\ K_{P1} & 0 & K_{P2} & 0 \\ 0 & K_{P2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \text{Matriz de potência.}$$

$$K_{P1} \rightarrow K_{P1, i,j} = \frac{1}{2} \cdot \int_{\Gamma} n_r \cdot \rho \cdot \omega_0 \cdot r \cdot \phi_i \cdot \phi_j \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Gamma$$

$$K_{P2} \rightarrow K_{P2, i,j} = \frac{1}{2} \cdot \int_{\Gamma} n_z \cdot \rho \cdot \omega_0 \cdot r \cdot \phi_i \cdot \phi_j \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Gamma$$

$$\mathbf{M}_{\kappa} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{\kappa, \theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \text{Matriz de potência do modelo de material.}$$

$$M_{\kappa, \theta} \rightarrow M_{\kappa, \theta, i} = - \int_{\Omega} \omega_0 \cdot r \cdot \kappa_{\theta}(\alpha) \cdot \phi_i \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$$

$$\mathbf{H} = [K_{H1} \ 0 \ K_{H2} \ 0] : \text{Matriz de potência de efeitos de inércia.}$$

$$\mathbf{K}_{H1} \rightarrow K_{H1, i} = \frac{1}{2} \cdot \int_{\Gamma} n_r \cdot \rho \cdot \omega_0^2 \cdot r^2 \cdot \phi_i \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Gamma$$

$$\mathbf{K}_{H2} \rightarrow K_{H2, i} = \frac{1}{2} \cdot \int_{\Gamma} n_z \cdot \rho \cdot \omega_0^2 \cdot r^2 \cdot \phi_i \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Gamma$$

$F_p = \int_{\Omega} \rho \cdot \omega_0 \cdot r \cdot f_{\theta} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$  : Matriz de potência de força. Se  $\rho \cdot \mathbf{f}$

for a força gravitacional,  $\rho \cdot \mathbf{f} = (0, 0, -\rho \cdot g)$  e  $F_p = 0$ .

### B.2.3 Vorticidade

A equação (4.5.26) pode ser representada na forma matricial para todos os nós (utilizando-se (4.2.21) a (4.2.24)),

$$\xi_{V,rel} = \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{C}_{V1} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{C}_{V2} \cdot \mathbf{z}_{rel} + \mathbf{z}_{rel}^T \cdot \mathbf{C}_{V3} \cdot \mathbf{z}_{rel} \quad (B.15)$$

em que

$$\mathbf{C}_{V1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{V1} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{V2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{V1} + \mathbf{K}_{V3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_{V2} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{V4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} : \text{Matriz de vorticidade original.}$$

$$\mathbf{K}_{V1} \rightarrow K_{V1, i,j} = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{V2} \rightarrow K_{V2, i,j} = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{V3} \rightarrow K_{V3, i,j} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \frac{\phi_i}{r} \right) \cdot \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\phi_j}{r} \right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{V4} \rightarrow K_{V4, i,j} = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega$$

$$\mathbf{C}_{V2} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{VC1} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{VC2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{VC5} + \mathbf{K}_{VC3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_{VC6} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{VC4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} : \text{Matriz de vorticidade mista.}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{VC1} \rightarrow K_{VC1, i,j} &= \int_{\Omega} \left[ \frac{k_V}{\rho} \cdot \kappa_r(\alpha) \right] \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega \\
 \mathbf{K}_{VC2} \rightarrow K_{VC2, i,j} &= \int_{\Omega} \left[ \frac{k_V}{\rho} \cdot \kappa_z(\alpha) \right] \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega \\
 \mathbf{K}_{VC3} \rightarrow K_{VC3, i,j} &= \int_{\Omega} \left[ \frac{k_V}{\rho} \cdot \kappa_\theta(\alpha) \right] \cdot \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \frac{\phi_i}{r} \right) \cdot \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\phi_j}{r} \right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega \\
 \mathbf{K}_{VC4} \rightarrow K_{VC4, i,j} &= \int_{\Omega} \left[ \frac{k_V}{\rho} \cdot \kappa_r(\alpha) \right] \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega \\
 \mathbf{K}_{VC5} \rightarrow K_{VC5, i,j} &= \int_{\Omega} \left[ \frac{k_V}{\rho} \cdot \kappa_\theta(\alpha) \right] \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega \\
 \mathbf{K}_{VC6} \rightarrow K_{VC6, i,j} &= \int_{\Omega} \left[ \frac{k_V}{\rho} \cdot \kappa_r(\alpha) \right] \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}_{V3} = \begin{bmatrix} K_{VR1} & 0 & -K_{VR2} & 0 \\ 0 & K_{VR5} + K_{VR3} & 0 & 0 \\ -K_{VR2} & 0 & K_{VR4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \text{Matriz de vorticidade do}$$

modelo de material.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{VR1} \rightarrow K_{VR1, i,j} &= \int_{\Omega} \left[ \frac{k_V}{\rho} \cdot \kappa_r(\alpha) \right]^2 \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega \\
 \mathbf{K}_{VR2} \rightarrow K_{VR2, i,j} &= \int_{\Omega} \left[ \frac{k_V}{\rho} \cdot \kappa_r(\alpha) \right] \cdot \left[ \frac{k_V}{\rho} \cdot \kappa_z(\alpha) \right] \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega \\
 \mathbf{K}_{VR3} \rightarrow K_{VR3, i,j} &= \int_{\Omega} \left[ \frac{k_V}{\rho} \cdot \kappa_\theta(\alpha) \right]^2 \cdot \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \frac{\phi_i}{r} \right) \cdot \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\phi_j}{r} \right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega \\
 \mathbf{K}_{VR4} \rightarrow K_{VR4, i,j} &= \int_{\Omega} \left[ \frac{k_V}{\rho} \cdot \kappa_r(\alpha) \right]^2 \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega \\
 \mathbf{K}_{VR5} \rightarrow K_{VR5, i,j} &= \int_{\Omega} \left[ \frac{k_V}{\rho} \cdot \kappa_\theta(\alpha) \right]^2 \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\Omega
 \end{aligned}$$

### B.3 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DA FORMA DISCRETA DAS FUNÇÕES OBJETIVO

A variável de projeto (variável dependente) pode ser aproximada por:

$$\alpha(s) \approx \sum_{i=1}^{n_a} \zeta_i(s) \cdot \alpha_i = \zeta^T \cdot \alpha \quad (B.16)$$

em que

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_{n_a} \end{bmatrix} : \text{Vetor de valores nodais da variável de projeto.}$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \vdots \\ \zeta_{n_a} \end{bmatrix} : \text{Funções de forma (“funções base”).}$$

Utilizando-se elementos  $P_1$  para a variável de projeto,  $n_a = 3$ .

O método adjunto é computado por dois sistemas lineares para cada sensibilidade da função objetivo, dada a forma fraca  $\mathbf{F}(\mathbf{z}, \alpha) = \mathbf{0}$  (equação (B.1)). Assim,

$$\left( \frac{d\Phi_{rel}}{d\alpha} \right)^* = \left( \frac{\partial\Phi_{rel}}{\partial\alpha} \right)^* - \left( \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\alpha} \right)^* \cdot \lambda_{d,\Phi} , \quad \left( \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{z}} \right)^* \cdot \lambda_{d,\Phi} = \left( \frac{\partial\Phi_{rel}}{\partial\mathbf{z}} \right)^* \quad (B.17)$$

$$\left( \frac{dP_f}{d\alpha} \right)^* = \left( \frac{\partial P_f}{\partial\alpha} \right)^* - \left( \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\alpha} \right)^* \cdot \lambda_{d,P} , \quad \left( \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{z}} \right)^* \cdot \lambda_{d,P} = \left( \frac{\partial P_f}{\partial\mathbf{z}} \right)^* \quad (B.18)$$

$$\left( \frac{d\xi_{V,rel}}{d\alpha} \right)^* = \left( \frac{\partial\xi_{V,rel}}{\partial\alpha} \right)^* - \left( \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\alpha} \right)^* \cdot \lambda_{d,V} , \quad \left( \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{z}} \right)^* \cdot \lambda_{d,V} = \left( \frac{\partial\xi_{V,rel}}{\partial\mathbf{z}} \right)^* \quad (B.19)$$

em que

$\lambda_{d,\Phi}$ ,  $\lambda_{d,P}$ ,  $\lambda_{d,V}$ : Vetores adjuntos discretos, correspondendo às matrizes transpostas conjugadas dos multiplicadores de Lagrange.

### B.3.1 Sensibilidade da dissipação de energia

Cada um dos termos da equação (B.17) está explicitado a seguir.

- $\frac{\partial \Phi_{rel}}{\partial \alpha}$  : Parte explícita da sensibilidade da dissipação de energia.

A partir da equação (B.12),

$$\frac{\partial \Phi_{rel}}{\partial \alpha} = \mathbf{z}_{rel}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{C}_k}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{z} \quad (B.20)$$

- $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha}$  : Parte explícita da sensibilidade da forma discreta das equações da forma fraca. A partir da equação (B.1),

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathbf{K}_{G,k}}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{z}_{rel} \quad (B.21)$$

- $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}}$  : Jacobiano da forma discreta das equações da forma fraca ( $J_F$ ), dada pela equação (B.7).

- $\frac{\partial \Phi_{rel}}{\partial \mathbf{z}}$  : Jacobiano da dissipação de energia. A partir da equação (B.12) e usando a regra do produto,

$$\frac{\partial \Phi_{rel}}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial (\mathbf{z}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial (\mathbf{C}_f \cdot \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial (\mathbf{z}_{rel}^T \cdot \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \quad (B.22)$$

$$\frac{\partial \Phi_{rel}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{C} + \mathbf{C}_f + \frac{\partial \mathbf{z}_{rel}^T}{\partial \mathbf{z}} \cdot \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{z} + \mathbf{z}_{rel}^T \cdot \mathbf{C}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{z}} \quad (B.23)$$

Como  $\mathbf{z}^T \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{z} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{z}$  ,  $\mathbf{z}_{rel}^T \cdot \mathbf{C}_k = \mathbf{C}_k^T \cdot \mathbf{z}_{rel} = \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{z}_{rel}$  e  $\frac{\partial \mathbf{z}_{rel}^T}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{I}$  (\*  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade e  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{C}_k$  são simétricas),

$$\frac{\partial \Phi_{rel}}{\partial \mathbf{z}} = 2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{C}_f + \mathbf{C}_k \cdot (\mathbf{z} + \mathbf{z}_{rel}) \quad (B.24)$$

### B.3.2 Sensibilidade da potência

Cada um dos termos da equação (B.18) está explicitado a seguir.

-  $\frac{\partial P_f}{\partial \alpha}$  : Parte explícita da sensibilidade da potência. A partir da equação (B.14),

$$\frac{\partial P_f}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathbf{M}_k}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{z}_{rel} \quad (B.25)$$

-  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha}$  : Parte explícita da sensibilidade da forma discreta das equações da forma fraca. A partir da equação (B.1),

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathbf{K}_{G,k}}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{z}_{rel} \quad (B.26)$$

-  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}}$  : Jacobiano da forma discreta das equações da forma fraca ( $\mathbf{J}_F$ ), dada pela equação (B.7).

-  $\frac{\partial P_f}{\partial \mathbf{z}}$  : Jacobiano da potência. A partir da equação (B.14), usando a regra do produto e sabendo que  $\mathbf{M}_p$  é simétrica,

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mathbf{z}} = 2 \cdot \mathbf{M}_p \cdot \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{H1} \\ \mathbf{M}_{k,\theta} \\ \mathbf{K}_{H2} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (B.27)$$

### B.3.3 Sensibilidade da vorticidade

Cada um dos termos da equação (B.15) está explicitado a seguir.

-  $\frac{\partial \xi_{V,rel}}{\partial \alpha}$  : Parte explícita da sensibilidade da vorticidade. A partir da equação (B.15),

$$\frac{\partial \xi_{V,rel}}{\partial \alpha} = \mathbf{z}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{C}_{V2}}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{z}_{rel} + \mathbf{z}_{rel}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{C}_{V3}}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{z}_{rel} \quad (B.28)$$

-  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha}$  : Parte explícita da sensibilidade da forma discreta das equações da forma fraca. A partir da equação (B.1),

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathbf{C}_k}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{z}_{rel} \quad (B.29)$$

-  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}}$  : Jacobiano da forma discreta das equações da forma fraca ( $J_F$ ), dada pela equação (B.7).

-  $\frac{\partial \xi_{V,rel}}{\partial \mathbf{z}}$  : Jacobiano da vorticidade. A partir da equação (B.15), usando a regra do produto e sabendo que  $\mathbf{C}_{V1}$  e  $\mathbf{C}_{V3}$  são simétricas,

$$\frac{\partial \xi_{V,rel}}{\partial \mathbf{z}} = 2 \cdot \mathbf{C}_{V1} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{C}_{V2} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{C}_{V2}^T \cdot \mathbf{z}_{rel} + 2 \cdot \mathbf{C}_{V3} \cdot \mathbf{z}_{rel} \quad (B.30)$$

## APÊNDICE C – Equações para o modelo 2D

Para simulação/otimização da voluta da bomba Tesla, é utilizado um modelo 2D comum (i.e. sem escoamento girante). As equações dele são apresentadas a seguir. Por simplicidade, as submatrizes estão expressas usando notação indicial (de Einstein).

### C.1 FORMA FRACA DO PROBLEMA 2D

#### C.1.1 Forma contínua

Analogamente a Romero e Silva (2014, p. 275), para referencial absoluto, as equações da forma fraca para o problema 2D são dadas por (considerando-se espessura unitária (“1 m”)):

$$R_{c,j} = \int_{\Pi} [\nabla \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}}] \cdot \mathbf{w}_{p,j} \cdot d\Omega \quad (\text{C.1})$$

$$R_{m,j} = \int_{\Omega} [\rho \cdot \nabla \mathbf{v}_{\text{abs}} \cdot \mathbf{v}_{\text{abs}} + \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{w}_{v,j}) - \rho \cdot \mathbf{f}] \cdot \mathbf{w}_{v,j} \cdot d\Omega - \oint_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}_{v,j}) \cdot \mathbf{n} \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} \kappa(\alpha) \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{w}_{v,j} \cdot d\Omega \quad (\text{C.2})$$

em que

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -p + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} & \mu \cdot \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \mu \cdot \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & -p + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix} : \text{Tensor de tensões em 2D.}$$

$$\mathbf{s} = (x, y) = x \cdot \mathbf{e}_x + y \cdot \mathbf{e}_y : \text{Posição.}$$

$$\mathbf{v}_{\text{abs}} = (v_x, v_y) = v_x \cdot \mathbf{e}_x + v_y \cdot \mathbf{e}_y : \text{Velocidade.}$$

#### C.1.2 Forma discreta

Analogamente a Romero e Silva (2014, p. 276 e 277), para referencial absoluto,

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_G \cdot \mathbf{z} + \mathbf{K}_{G,\kappa} \cdot \mathbf{z}_{rel} - \mathbf{F}_c = \mathbf{0} \quad (C.3)$$

em que

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ p \end{bmatrix} : \text{Variáveis de estado, sendo que:}$$

$$u_1 = v_x$$

$$u_2 = v_y$$

$$u_3 = p$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_x \\ \mathbf{v}_y \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}_{(2n+m) \times 1} : \text{Vetor de valores nodais das variáveis de estado,}$$

sendo que:

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{v}_x \rightarrow \phi_j \cdot v_{r,j}$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{v}_y \rightarrow \phi_j \cdot v_{y,j}$$

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{p} \rightarrow \chi_j(s) \cdot p_j$$

$$\mathbf{z}_{rel} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{rel,x} \\ \mathbf{v}_{rel,y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} : \text{Velocidades nodais relativas ao modelo de material.}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{m,x} \\ \mathbf{R}_{m,y} \\ \mathbf{R}_c \end{bmatrix} : \text{Forma fraca do problema separada em 3 componentes}$$

de resíduo.

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} 2 \cdot \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{12} & -\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{11} + 2 \cdot \mathbf{K}_{22} & -\mathbf{Q}_2 \\ -\mathbf{Q}_1^T & -\mathbf{Q}_2^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} : \text{Matriz global relativa às}$$

variáveis de estado.

$$\mathbf{K}_{ij} \rightarrow K_{i,j} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial u_i} \cdot d\Omega$$

$$\mathbf{Q}_i \rightarrow Q_i = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial u_j} \cdot \chi_j \cdot d\Omega$$

$$K_{G,\kappa} = \begin{bmatrix} K_\kappa & 0 & 0 \\ 0 & K_\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \text{Matriz do modelo de material.}$$

$$K_\kappa \rightarrow K_{\kappa, i, j} = \int_{\Omega} \kappa(\alpha) \cdot \phi_i \cdot \phi_j \cdot d\Omega$$

$$F_c \rightarrow F_{c, i, j} = \int_{\Omega} \rho \cdot f_i \cdot \phi_j \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} h_i \cdot \phi_j \cdot d\Gamma : \text{Matriz de força, em}$$

que  $h_i$  vem das condições de contorno.

## C.2 DISSIPAÇÃO DE ENERGIA ABSOLUTA

### C.2.1 Forma contínua

Analogamente a Romero e Silva (2014, p. 277), para referencial absoluto,

$$\Phi_{abs} = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \mu \cdot (\nabla v_{abs} + \nabla v_{abs}^T) \cdot (\nabla v_{abs} + \nabla v_{abs}^T) - \rho \cdot f \cdot v_{abs} \right] \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \kappa(\alpha) \cdot v_{rel} \cdot v_{abs} \cdot d\Omega \quad (C.4)$$

### C.2.2 Forma discreta

Analogamente a Romero e Silva (2014, p. 277), para referencial absoluto,

$$\Phi_{rel} = z^T \cdot C \cdot z + C_f \cdot z + z_{rel}^T \cdot C_\kappa \cdot z \quad (C.5)$$

em que

$$C = \begin{bmatrix} 2K_{11} + K_{22} & K_{12} & 0 \\ K_{12} & K_{11} + 2 \cdot K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$K_{ij}$  : Ver a equação (C.3).

$C_\kappa = K_{G,\kappa}$  : Ver a equação (C.3).

$$C_f = \begin{bmatrix} F_{f1} & 0 & 0 \\ 0 & F_{f2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \text{Matriz de forças de corpo.}$$

$$F_{f1} \rightarrow F_{f1, i} = \int_{\Omega} \rho \cdot f_x \phi_i \cdot d\Omega$$

$$F_{f2} \rightarrow F_{f2,i} = \int_{\Omega} \rho \cdot f_y \cdot \phi_i \cdot d\Omega$$

### C.3 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DA FORMA DISCRETA DA FUNÇÃO OBJETIVO

Analogamente à equação (B.17),

$$\left( \frac{d\Phi_{\text{abs}}}{d\alpha} \right)^* = \left( \frac{\partial\Phi_{\text{abs}}}{\partial\alpha} \right)^* - \left( \frac{\partial F}{\partial\alpha} \right)^* \cdot \lambda_{d,\Phi} \quad , \quad \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^* \cdot \lambda_{d,\Phi} = \left( \frac{\partial\Phi_{\text{abs}}}{\partial z} \right)^* \quad (\text{C.6})$$

em que

- $\frac{\partial\Phi_{\text{abs}}}{\partial\alpha}$  : Parte explícita da sensibilidade da dissipação de energia.

A partir da equação (C.5),

$$\frac{\partial\Phi_{\text{abs}}}{\partial\alpha} = z_{\text{rel}}^T \cdot \frac{\partial C_{\kappa}}{\partial\alpha} \cdot z \quad (\text{C.7})$$

- $\frac{\partial F}{\partial\alpha}$  : Parte explícita da sensibilidade da forma discreta das equações da forma fraca. A partir da equação (C.3),

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha} = \frac{\partial K_{G,\kappa}}{\partial\alpha} \cdot z_{\text{rel}} \quad (\text{C.8})$$

- $\frac{\partial F}{\partial z}$  : Jacobiano da forma discreta das equações da forma fraca ( $J_F$ ), deduzível a partir de (C.3).

- $\frac{\partial\Phi_{\text{abs}}}{\partial z}$  : Jacobiano da dissipação de energia. A partir da equação (C.5) e usando a regra do produto,

$$\frac{\partial \Phi_{\text{abs}}}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial(\mathbf{z}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial(\mathbf{C}_f \cdot \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial(\mathbf{z}_{\text{rel}}^T \cdot \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \quad (\text{C.9})$$

$$\frac{\partial \Phi_{\text{abs}}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{C} + \mathbf{C}_f + \frac{\partial \mathbf{z}_{\text{rel}}^T}{\partial \mathbf{z}} \cdot \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{z} + \mathbf{z}_{\text{rel}}^T \cdot \mathbf{C}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{z}} \quad (\text{C.10})$$

Como  $\mathbf{z}^T \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{z} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{z}$ ,  $\mathbf{z}_{\text{rel}}^T \cdot \mathbf{C}_k = \mathbf{C}_k^T \cdot \mathbf{z}_{\text{rel}} = \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{z}_{\text{rel}}$  e  $\frac{\partial \mathbf{z}_{\text{rel}}^T}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{I}$  (\*  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade e  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{C}_k$  são simétricas),

$$\frac{\partial \Phi_{\text{abs}}}{\partial \mathbf{z}} = 2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{C}_f + \mathbf{C}_k \cdot (\mathbf{z} + \mathbf{z}_{\text{rel}}) \quad (\text{C.11})$$

## APÊNDICE D – Esquemas de otimização usados para o rotor da bomba Tesla

Os esquemas de otimização usados na otimização topológica do rotor da bomba Tesla estão detalhados nas tabelas a seguir. As suas escolhas foram feitas com base em Borrvall e Petersson (2003).

As estimativas iniciais utilizadas para a variável de projeto no domínio de projeto são:

1)  $\alpha_0(r, z) = f - 1\%$  (fração de fluido permitida considerando uma margem de erro)

$f$  é a fração de fluido permitida pela restrição de volume.

1% é uma margem de erro que garante que a estimativa inicial não viola a restrição de volume.

2)  $\alpha_0(r, z) = 0$  (sólido)

3)  $\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)$  (distribuição para a rotação anterior)

A rotação anterior é 100 rpm mais baixa do que a rotação atual. Por exemplo, se a rotação atual for 100 rpm,  $\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para 0 rpm}}(r, z)$ ; se for 400 rpm,  $\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para 300 rpm}}(r, z)$

## D.1. BOMBA TESLA DE ENTRADA HORIZONTAL

Tabela D.1 - Esquemas de otimização para bomba Tesla de entrada horizontal

0 rpm ~ 1000 rpm	<p>→ Passo 1: Estimativa inicial para a distribuição de <math>\alpha</math> no domínio de projeto inteiro:  <math>\alpha_0(r, z) = f - 1\%</math>  <math>q_r = q_\theta = q_z = 0,01</math>  <math>f = 50\%</math>  <math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  Máximo número de iterações: 20 </p>	→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 0,1$ Máximo número de iterações: 20
		→ Passo 3: $= 2,5 \times 10^2 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 20
		→ Passo 4: $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ Máximo número de iterações: 20
		→ Passo 5: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 20
		→ Passo 6: $\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^3 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 20
		→ Passo 7: $q_r = q_\theta = q_z = 100,0$ Máximo número de iterações: 20

## D.2. BOMBA TESLA DE ENTRADA VERTICAL

### D.2.1. Um canal

Tabela D.2 - Esquemas de otimização para bomba Tesla de entrada vertical com um canal, para dissipação de energia, 500 rpm, 0,5 L/min, razão de aspecto 2,48 : 1 ((15 – 2,6) : 5 = 12,4 : 5), fração de fluido permitida 30%, com eixo

<p>→ Passo 1: Estimativa inicial para a distribuição de <math>\alpha</math> no domínio de projeto inteiro:  <math>\alpha_0(r, z) = 0</math> (sólido)</p> <p><math>n_0 = 0</math> rpm  <math>q_r = q_\theta = q_z = 0,01</math>  <math>f = 30\%</math>  <math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, \theta} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  Máximo número de iterações: 20</p>	<p>→ Passo 2:  <math>q_r = q_\theta = q_z = 0,1</math>  Máximo número de iterações: 20</p> <p>→ Passo 3:  <math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, \theta} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^3 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  Máximo número de iterações: 20</p> <p>→ Passo 4:  <math>q_r = q_\theta = q_z = 10,0</math>  <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, \theta} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  Máximo número de iterações: 20</p>
<p>→ Passo 5:  <math>n_0 = 100</math> rpm  <math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, \theta} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^4 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  Máximo número de iterações: 50</p>	<p>→ Passo 6:  <math>q_r = q_\theta = q_z = 10,0</math>  Máximo número de iterações: 50</p>
<p>→ Passo 7:  <math>n_0 = 200</math> rpm  <math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^3 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  Máximo número de iterações: 100</p>	
<p>→ Passo 8:  <math>n_0 = 300</math> rpm  <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^2 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  Máximo número de iterações: 100</p>	
<p>→ Passo 9:  <math>n_0 = 400</math> rpm  Máximo número de iterações: 100</p>	
<p>→ Passo 10:  <math>n_0 = 500</math> rpm  <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  Máximo número de iterações: 100</p>	

Tabela D.3 - Esquemas de otimização para bomba Tesla de entrada vertical com um canal, para dissipação de energia, **0,5 L/min**, razão de aspecto 2,48 : 1 ((15 – 2,6) : 5 = 12,4 : 5), fração de fluido permitida 30%, com eixo

0 rpm	<p>→ Passo 1: Estimativa inicial para a distribuição de <math>\alpha</math> no domínio de projeto inteiro:</p> $\alpha_0(r, z) = 0 \text{ (sólido)}$ $q_r = q_\theta = q_z = 0,01$ $f = 30\%$ $\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, \theta} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ <p>Máximo número de iterações: 20</p>	<p>→ Passo 2: <math>q_r = q_\theta = q_z = 0,1</math> Máximo número de iterações: 20</p>
		<p>→ Passo 3: <math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math> <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, \theta} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^3 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math> Máximo número de iterações: 20</p>
		<p>→ Passo 4: <math>q_r = q_\theta = q_z = 10,0</math> <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, \theta} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math> Máximo número de iterações: 20</p>
100 rpm	<p>→ Passo 1: <math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math> <math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math> <math>f = 30\%</math> <math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math> <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, \theta} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^4 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math> Máximo número de iterações: 50</p>	<p>→ Passo 2: <math>q_r = q_\theta = q_z = 10,0</math> Máximo número de iterações: 50</p>
200 rpm	<p><math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{optimized for previous rotation}}(r, z)</math> <math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math> <math>f = 30\%</math> <math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math> <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math> <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^3 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math> Máximo número de iterações: 100</p>	
300 rpm ~ 400 rpm	<p><math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math> <math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math> <math>f = 30\%</math> <math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math> <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math> <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^2 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math> Máximo número de iterações: 100</p>	
500 rpm	<p><math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math> <math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math> <math>f = 30\%</math> <math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math> <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math> <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math> Máximo número de iterações: 100</p>	
600 rpm ~ 700 rpm	<p>→ Passo 1: <math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math> <math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math> <math>f = 30\%</math> <math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math> <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math> <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math></p>	<p>→ Passo 2: <math>q_r = q_\theta = q_z = 10,0</math> Máximo número de iterações: 50</p>

	Máximo número de iterações: 50	
800 rpm ~ 900 rpm	<p>→ Passo 1:</p> $\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)$ $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $f = 30\%$ $K_{\min, r} = K_{\min, \theta} = K_{\min, z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $K_{\max, r} = K_{\max, \theta} = 8,0 \times 10^5 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $K_{\max, z} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 50	<p>→ Passo 2:</p> $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50
1000 rpm	<p>→ Passo 1:</p> $\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)$ $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $f = 30\%$ $K_{\min, r} = K_{\min, \theta} = K_{\min, z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $K_{\max, r} = K_{\max, \theta} = 1,0 \times 10^6 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $K_{\max, z} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 50	<p>→ Passo 2:</p> $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50

Tabela D.4 - Esquemas de otimização para bomba Tesla de entrada vertical com um canal, para dissipação de energia, **0,75 L/min**, razão de aspecto 2,48 : 1 ((15 – 2,6) : 5 = 12,4 : 5), fração de fluido permitida 30%, com eixo

0 rpm	<p>→ Passo 1:</p> <p>Estimativa inicial para a distribuição de <math>\alpha</math> no domínio de projeto inteiro:</p> $\alpha_0(r, z) = 0$ (sólido)	<p>→ Passo 2:</p> $q_r = q_\theta = q_z = 0,1$ Máximo número de iterações: 20
100 rpm ~ 800 rpm	<p>→ Passo 1:</p> $\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)$ $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $f = 30\%$ $K_{\min, r} = K_{\min, \theta} = K_{\min, z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $K_{\max, r} = K_{\max, \theta} = K_{\max, z} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 50	<p>→ Passo 2:</p> $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50
900 rpm	<p>→ Passo 1:</p> $\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)$ $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $f = 30\%$ $K_{\min, r} = K_{\min, \theta} = K_{\min, z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $K_{\max, r} = K_{\max, \theta} = 8,0 \times 10^5 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $K_{\max, z} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 50	<p>→ Passo 2:</p> $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50
1000 rpm	→ Passo 1:	→ Passo 2:

$\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)$ $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $f = 30\%$ $K_{\min, r} = K_{\min, \theta} = K_{\min, z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $K_{\max, r} = K_{\max, z} = 1,0 \times 10^6 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $K_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 50	$q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50
---	---

Tabela D.5 - Esquemas de otimização para bomba Tesla de entrada vertical com um canal, para dissipação de energia, **0,25 L/min**, razão de aspecto 2,48 : 1 ((15 – 2,6) : 5 = 12,4 : 5), fração de fluido permitida 30%, com eixo

0 rpm	$\rightarrow$ Passo 1: Estimativa inicial para a distribuição de $\alpha$ no domínio de projeto inteiro: $\alpha_0(r, z) = \alpha(r, z)$ $q_r = q_\theta = q_z = 0,01$ $f = 30\%$ $K_{\min, r} = K_{\min, \theta} = K_{\min, z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $K_{\max, r} = K_{\max, \theta} = K_{\max, z} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 20	$\rightarrow$ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 0,1$ Máximo número de iterações: 20
	$\rightarrow$ Passo 3: $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $K_{\max, r} = K_{\max, \theta} = K_{\max, z} = 2,5 \times 10^3 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 20	$\rightarrow$ Passo 4: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ $K_{\max, r} = K_{\max, \theta} = K_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 20
	$\rightarrow$ Passo 1: $\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)$ $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $f = 30\%$ $K_{\min, r} = K_{\min, \theta} = K_{\min, z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $K_{\max, r} = K_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $K_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 50	$\rightarrow$ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50
	$\rightarrow$ Passo 1: $\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)$ $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $f = 30\%$ $K_{\min, r} = K_{\min, \theta} = K_{\min, z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $K_{\max, r} = K_{\max, z} = 2,5 \times 10^6 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $K_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 50	$\rightarrow$ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50
1000 rpm	$\rightarrow$ Passo 1: $\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)$ $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $f = 30\%$ $K_{\min, r} = K_{\min, \theta} = K_{\min, z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $K_{\max, r} = K_{\max, z} = 6,0 \times 10^6 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $K_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 50	$\rightarrow$ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50

Tabela D.6 - Esquemas de otimização para bomba Tesla de entrada vertical com um canal, para dissipação de energia, 0,5 L/min, razão de aspecto **1,98 : 1 ((12,5 – 2,6) : 5 = 9,9 : 5)**, fração de fluido permitida 30%, com eixo

0 rpm	<p>→ Passo 1: Estimativa inicial para a distribuição de <math>\alpha</math> no domínio de projeto inteiro:  <math>\alpha_0(r, z) = 0</math> (sólido)  <math>q_r = q_\theta = q_z = 0,01</math>  <math>f = 30\%</math>  <math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, \theta} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  Máximo número de iterações: 20</p>	→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 0,1$ Máximo número de iterações: 20
		→ Passo 3: $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, \theta} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^3 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 20
		→ Passo 4: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ $\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, \theta} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 20
		→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50
100 rpm ~ 700 rpm	<p>→ Passo 1:  <math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math>  <math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>f = 30\%</math>  <math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  Máximo número de iterações: 50</p>	→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50
800 rpm	<p>→ Passo 1:  <math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math>  <math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>f = 30\%</math>  <math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 5,0 \times 10^5 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  Máximo número de iterações: 50</p>	→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50
900 rpm	<p>→ Passo 1:  <math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math>  <math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>f = 30\%</math>  <math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 8,0 \times 10^5 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  Máximo número de iterações: 50</p>	→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50
1000 rpm	<p>→ Passo 1:  <math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math>  <math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>f = 30\%</math>  <math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 9,0 \times 10^5 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math>  Máximo número de iterações: 50</p>	→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50

Tabela D.7 - Esquemas de otimização para bomba Tesla de entrada vertical com um canal, para dissipação de energia, 0,5 L/min, razão de aspecto **1,48 : 1 ((10 – 2,6) : 5 = 7,4 : 5)**, fração de fluido permitida 30%, com eixo

0 rpm	<p>→ Passo 1: Estimativa inicial para a distribuição de <math>\alpha</math> no domínio de projeto inteiro:  <math>\alpha_0(r, z) = 0</math> (sólido)</p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 0,01</math></p> <p><math>f = 30\%</math></p> <p><math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math></p> <p><math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, \theta} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math></p> <p>Máximo número de iterações: 20</p>	→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 0,1$ Máximo número de iterações: 20
		→ Passo 3: $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, \theta} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^3 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ Máximo número de iterações: 20
		→ Passo 4: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ $\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, \theta} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ Máximo número de iterações: 20
		→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50
100 rpm ~ 200 rpm	<p>→ Passo 1:  <math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math></p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math></p> <p><math>f = 30\%</math></p> <p><math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math></p> <p><math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, \theta} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^4 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math></p> <p>Máximo número de iterações: 50</p>	→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50
300 rpm ~ 900 rpm	<p>→ Passo 1:  <math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math></p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math></p> <p><math>f = 30\%</math></p> <p><math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math></p> <p><math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math></p> <p><math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math></p> <p>Máximo número de iterações: 50</p>	→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50
1000 rpm	<p>→ Passo 1:  <math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math></p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math></p> <p><math>f = 30\%</math></p> <p><math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math></p> <p><math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 8,0 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math></p> <p><math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math></p> <p>Máximo número de iterações: 50</p>	→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50

Tabela D.8 - Esquemas de otimização para bomba Tesla de entrada vertical com um canal, para dissipação de energia, 0,5 L/min, razão de aspecto 2,48 : 1 ((15 – 2,6) : 5 = 12,4 : 5), fração de fluido permitida **20%**, com eixo

0 rpm	<p>→ Passo 1: Estimativa inicial para a distribuição de <math>\alpha</math> no domínio de projeto inteiro:  <math>\alpha_0(r, z) = 0</math> (sólido)</p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 0,01</math></p> <p><b><math>f = 20\%</math></b></p> <p><math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math></p> <p><math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, \theta} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math></p> <p>Máximo número de iterações: 20</p>	→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 0,1$ Máximo número de iterações: 20
		→ Passo 3: $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, \theta} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^3 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 20
		→ Passo 4: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ $\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, \theta} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 20
		→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50
100 rpm ~ 800 rpm	<p>→ Passo 1:  <math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math></p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math></p> <p><b><math>f = 20\%</math></b></p> <p><math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math></p> <p><math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math></p> <p><math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math></p> <p>Máximo número de iterações: 50</p>	→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50
900 rpm ~ 1000 rpm	<p>→ Passo 1:  <math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math></p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math></p> <p><b><math>f = 20\%</math></b></p> <p><math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math></p> <p><math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 5,0 \times 10^5 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math></p> <p><math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math></p> <p>Máximo número de iterações: 50</p>	→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50

Tabela D.9 - Esquemas de otimização para bomba Tesla de entrada vertical com um canal, para dissipação de energia, 0,5 L/min, razão de aspecto 2,48 : 1 ((15 – 2,6) : 5 = 12,4 : 5), fração de fluido permitida **25%**, com eixo

0 rpm	<p>→ Passo 1: Estimativa inicial para a distribuição de <math>\alpha</math> no domínio de projeto inteiro:  <math>\alpha_0(r, z) = 0</math> (sólido)</p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 0,01</math></p> <p><b><math>f = 25\%</math></b></p> <p><math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math></p> <p><math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, \theta} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})</math></p> <p>Máximo número de iterações: 20</p>	→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 0,1$ Máximo número de iterações: 20
		→ Passo 3: $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, \theta} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^3 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 20
		→ Passo 4: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ $\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, \theta} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 20
		→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$
100 rpm ~ 800 rpm	<p>→ Passo 1:  <math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math></p>	→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$

	$q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $f = 25\%$ $\kappa_{\min,r} = \kappa_{\min,\theta} = \kappa_{\min,z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $\kappa_{\max,r} = \kappa_{\max,z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $\kappa_{\max,\theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 50	Máximo número de iterações: 50
900 rpm	→ Passo 1: $\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)$ $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $f = 25\%$ $\kappa_{\min,r} = \kappa_{\min,\theta} = \kappa_{\min,z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $\kappa_{\max,r} = \kappa_{\max,z} = 5,0 \times 10^5 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $\kappa_{\max,\theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 50	→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50
1000 rpm	→ Passo 1: $\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)$ $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $f = 25\%$ $\kappa_{\min,r} = \kappa_{\min,\theta} = \kappa_{\min,z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $\kappa_{\max,r} = \kappa_{\max,z} = 8,0 \times 10^5 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $\kappa_{\max,\theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 50	→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50

Tabela D.10 - Esquemas de otimização para bomba Tesla de entrada vertical com um canal, para dissipação de energia, 0,5 L/min, razão de aspecto 2,48 : 1 ((15 – 2,6) : 5 = 12,4 : 5), fração de fluido permitida 30%, **sem eixo**

0 rpm	→ Passo 1: Estimativa inicial para a distribuição de $\alpha$ no domínio de projeto inteiro: $\alpha_0(r, z) = 0$ (sólido) $n_0 = 0$ rpm $q_r = q_\theta = q_z = 0,01$ $f = 30\%$ $\kappa_{\min,r} = \kappa_{\min,\theta} = \kappa_{\min,z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ $\kappa_{\max,r} = \kappa_{\max,\theta} = \kappa_{\max,z} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 20	→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 0,1$ Máximo número de iterações: 20
		→ Passo 3: $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $\kappa_{\max,r} = \kappa_{\max,\theta} = \kappa_{\max,z} = 2,5 \times 10^3 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 20
		→ Passo 4: $\kappa_{\max,r} = \kappa_{\max,\theta} = \kappa_{\max,z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 20
		→ Passo 5: $\kappa_{\max,r} = \kappa_{\max,\theta} = \kappa_{\max,z} = 5,0 \times 10^5 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$ Máximo número de iterações: 20
		→ Passo 6: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 20
100 rpm ~ 500 rpm	→ Passo 1: $\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)$ $q_r = q_\theta = q_z = 0,1$ $f = 30\%$ $\kappa_{\min,r} = \kappa_{\min,\theta} = \kappa_{\min,z} = 0 \text{ kg}/(\text{m}^3\text{s})$	→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ Máximo número de iterações: 100

	$K_{máx,r} = K_{máx,z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{máx,\theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ Máximo número de iterações: 100	
600 rpm ~ 700 rpm	→ Passo 1: $\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)$ $q_r = q_\theta = q_z = 0,1$ $f = 30\%$ $K_{mín,r} = K_{mín,\theta} = K_{mín,z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{máx,r} = K_{máx,z} = 6,0 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{máx,\theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ Máximo número de iterações: 100	→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ Máximo número de iterações: 100
800 rpm	→ Passo 1: $\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)$ $q_r = q_\theta = q_z = 0,1$ $f = 30\%$ $K_{mín,r} = K_{mín,\theta} = K_{mín,z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{máx,r} = K_{máx,z} = 2,0 \times 10^6 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{máx,\theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ Máximo número de iterações: 100	→ Passo 2: $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ Máximo número de iterações: 100
900 rpm ~ 1000 rpm	$\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)$ $q_r = q_\theta = q_z = 0,1$ $f = 30\%$ $K_{mín,r} = K_{mín,\theta} = K_{mín,z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{máx,r} = K_{máx,z} = 5,0 \times 10^6 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{máx,\theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ Máximo número de iterações: 50	

Tabela D.11 - Esquemas de otimização para bomba Tesla de entrada vertical com um canal, para função multiobjetivo incluindo potência (20%) e dissipação de energia (80%), 600 rpm, 0,5 L/min, razão de aspecto 2,48 : 1 ((15 – 2,6) : 5 = 12,4 : 5), fração de fluido permitida 30%, com eixo

→ Passo 1: Estimativa inicial para a distribuição de $\alpha$ no domínio de projeto inteiro: $\alpha_0(r, z) = 0$ (sólido)	→ Passo 2: Máximo número de iterações: 20
$n_0 = 100 \text{ rpm}$ $q_r = q_\theta = q_z = 5,0$ $f = 30\%$ $K_{mín,r} = K_{mín,\theta} = K_{mín,z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{máx,r} = K_{máx,z} = 2,5 \times 10^4 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{máx,\theta} = 2,5 \times 10^3 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ Máximo número de iterações: 20	→ Passo 3: $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $K_{máx,r} = K_{máx,z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{máx,\theta} = 2,5 \times 10^4 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ Máximo número de iterações: 20
→ Passo 5: $n_0 = 200 \text{ rpm}$ $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ Máximo número de iterações: 20	→ Passo 4: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ Máximo número de iterações: 50
→ Passo 7: $n_0 = 300 \text{ rpm}$ $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $K_{máx,r} = K_{máx,z} = 5,0 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{máx,\theta} = 5,0 \times 10^4 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ Máximo número de iterações: 20	→ Passo 8: $q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ $K_{máx,r} = K_{máx,z} = 8,0 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{máx,\theta} = 8,0 \times 10^4 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ Máximo número de iterações: 50

→ Passo 9:

$$n_0 = 400 \text{ rpm}$$

$$q_r = q_\theta = q_z = 5,0$$

$$K_{\max, r} = K_{\max, z} = 4,0 \times 10^6 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$$

$$K_{\max, \theta} = 1,0 \times 10^4 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$$

Máximo número de iterações: 100

→ Passo 10:

$$n_0 = 500 \text{ rpm}$$

$$q_r = q_z = 20,0$$

$$q_\theta = 50,0$$

$$K_{\max, r} = K_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$$

$$K_{\max, \theta} = 1,0 \times 10^3 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$$

Máximo número de iterações: 100

→ Passo 11:

$$n_0 = 600 \text{ rpm}$$

$$q_r = q_z = 100,0$$

$$q_\theta = 10,0$$

$$K_{\max, r} = K_{\max, z} = 8,0 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$$

$$K_{\max, \theta} = 5,0 \times 10^3 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$$

Máximo número de iterações: 100

Tabela D.12 - Esquemas de otimização para bomba Tesla de entrada vertical com um canal, para função multiobjetivo incluindo vorticidade (20%) e dissipação de energia (80%), 500 rpm, 0,5 L/min, razão de aspecto 2,48 : 1 ((15 – 2,6) : 5 = 12,4 : 5), fração de fluido permitida 30%, com eixo

→ Passo 1:

Estimativa inicial para a distribuição de  $\alpha$  no domínio de projeto inteiro:

$$\alpha_0(r, z) = 0 \text{ (sólido)}$$

$$n_0 = 0 \text{ rpm}$$

$$q_r = q_\theta = q_z = 0,1$$

$$f = 30\%$$

$$K_{\min, r} = K_{\min, \theta} = K_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$$

$$K_{\max, r} = K_{\max, \theta} = K_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$$

Máximo número de iterações: 50

→ Passo 2:

$$K_{\max, r} = K_{\max, \theta} = K_{\max, z} = 2,5 \times 10^4 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$$

Máximo número de iterações: 50

→ Passo 3:

$$K_{\max, r} = K_{\max, \theta} = K_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$$

Máximo número de iterações: 50

→ Passo 4:

$$q_r = q_\theta = q_z = 1,0$$

Máximo número de iterações: 50

→ Passo 5:

$$n_0 = 100 \text{ rpm}$$

$$K_{\max, r} = K_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$$

$$K_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$$

Máximo número de iterações: 100

→ Passo 6:

$$n_0 = 200 \text{ rpm}$$

Máximo número de iterações: 100

→ Passo 7:

$$n_0 = 300 \text{ rpm}$$

Máximo número de iterações: 100

→ Passo 8:

$$n_0 = 400 \text{ rpm}$$

$$K_{\max, r} = K_{\max, z} = 8,0 \times 10^4 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$$

$$K_{\max, \theta} = 8,0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$$

Máximo número de iterações: 50

→ Passo 9:

$$K_{\max, r} = K_{\max, z} = 1,0 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$$

$$K_{\max, \theta} = 1,0 \times 10^1 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$$

Máximo número de iterações: 50

→ Passo 10:

$q_r = q_\theta = q_z = 10,0$ $K_{\max,r} = K_{\max,z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{\max,\theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ Máximo número de iterações: 20	
→ Passo 11: $n_0 = 500 \text{ rpm}$ $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $K_{\max,r} = K_{\max,z} = 8,0 \times 10^4 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{\max,\theta} = 8,0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ Máximo número de iterações: 50	→ Passo 12: $K_{\max,r} = K_{\max,z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{\max,\theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ Máximo número de iterações: 50

### D.2.1. Dois canais

Tabela D.13 - Esquemas de otimização para bomba Tesla de entrada vertical com dois canais, para dissipação de energia, 500rpm, 0,5 L/min, razão de aspecto 2,48 : 1 ((15 – 2,6) : 5 = 12,4 : 5), fração de fluido permitida 30%, com eixo

Estimativa inicial para a distribuição de $\alpha$ no domínio de projeto inteiro: $\alpha_0(r, z) = 0$ (sólido) $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $f = 30\%$ $K_{\min,r} = K_{\min,\theta} = K_{\min,z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{\max,r} = K_{\max,z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{\max,\theta} = 2,5 \times 10^2 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ Máximo número de iterações: 100
---

Tabela D.14 - Esquemas de otimização para bomba Tesla de entrada vertical com dois canais, para dissipação de energia, 0,5 L/min, razão de aspecto 2,48 : 1 ((15 – 2,6) : 5 = 12,4 : 5), fração de fluido permitida 30%, com eixo

0 rpm ~ 600 rpm	Estimativa inicial para a distribuição de $\alpha$ no domínio de projeto inteiro: $\alpha_0(r, z) = 0$ (sólido) $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $f = 30\%$ $K_{\min,r} = K_{\min,\theta} = K_{\min,z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{\max,r} = K_{\max,z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{\max,\theta} = 2,5 \times 10^2 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ Máximo número de iterações: 100
700 rpm ~ 900 rpm	$\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)$ $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $f = 30\%$ $K_{\min,r} = K_{\min,\theta} = K_{\min,z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{\max,r} = K_{\max,z} = 5,0 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{\max,\theta} = 2,5 \times 10^2 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ Máximo número de iterações: 100
1000 rpm	$\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)$ $q_r = q_\theta = q_z = 1,0$ $f = 30\%$ $K_{\min,r} = K_{\min,\theta} = K_{\min,z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{\max,r} = K_{\max,z} = 8,0 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ $K_{\max,\theta} = 2,5 \times 10^2 \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ Máximo número de iterações: 100

Tabela D.15 - Esquemas de otimização para bomba Tesla de entrada vertical com dois canais, para dissipação de energia, **0,75 L/min**, razão de aspecto 2,48 : 1 ((15 – 2,6) : 5 = 12,4 : 5), fração de fluido permitida 30%, com eixo

0 rpm ~ 800 rpm	<p>Estimativa inicial para a distribuição de <math>\alpha</math> no domínio de projeto inteiro:  <math>\alpha_0(r, z) = 0</math> (sólido)</p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>f = 30\%</math></p> <p><math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^2 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math></p> <p>Máximo número de iterações: 100</p>
900 rpm ~ 1000 rpm	<p><math>\alpha_0(r, z) = 0</math> (sólido)</p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>f = 30\%</math></p> <p><math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 5,0 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^2 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math></p> <p>Máximo número de iterações: 100</p>

Tabela D.16 - Esquemas de otimização para bomba Tesla de entrada vertical com dois canais, para dissipação de energia, **0,25 L/min**, razão de aspecto 2,48 : 1 ((15 – 2,6) : 5 = 12,4 : 5), fração de fluido permitida 30%, com eixo

0 rpm ~ 500 rpm	<p>Estimativa inicial para a distribuição de <math>\alpha</math> no domínio de projeto inteiro:  <math>\alpha_0(r, z) = 0</math> (sólido)</p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>f = 30\%</math></p> <p><math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^2 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math></p> <p>Máximo número de iterações: 100</p>
600 rpm ~ 1000 rpm	<p><math>\alpha_0(r, z) = 0</math> (sólido)</p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>f = 30\%</math></p> <p><math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^6 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^2 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math></p> <p>Máximo número de iterações: 100</p>

Tabela D.17 - Esquemas de otimização para bomba Tesla de entrada vertical com dois canais, para dissipação de energia, 0,5 L/min, razão de aspecto **1,48 : 1 ((10 – 2,6) : 5 = 7,4 : 5)**, fração de fluido permitida 30%, com eixo

0 rpm ~ 1000 rpm	<p>Estimativa inicial para a distribuição de <math>\alpha</math> no domínio de projeto inteiro:  <math>\alpha_0(r, z) = 0</math> (sólido)</p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>f = 30\%</math></p> <p><math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^2 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math></p> <p>Máximo número de iterações: 100</p>
------------------	---

Tabela D.18 - Esquemas de otimização para bomba Tesla de entrada vertical com dois canais, para dissipação de energia, 0,5 L/min, razão de aspecto  $3,48 : 1$  ( $(20 - 2,6) : 5 = 17,4 : 5$ ), fração de fluido permitida 30%, com eixo

0 rpm ~ 500 rpm	<p>Estimativa inicial para a distribuição de <math>\alpha</math> no domínio de projeto inteiro:  <math>\alpha_0(r, z) = 0</math> (sólido)</p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>f = 30\%</math>  <math>K_{\min, r} = K_{\min, \theta} = K_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>K_{\max, r} = K_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>K_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^2 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  Máximo número de iterações: 100</p>
600 rpm	<p><math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math></p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>f = 30\%</math>  <math>K_{\min, r} = K_{\min, \theta} = K_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>K_{\max, r} = K_{\max, z} = 2,5 \times 10^6 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>K_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^2 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  Máximo número de iterações: 100</p>
700 rpm ~ 1000 rpm	<p><math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math></p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>f = 30\%</math>  <math>K_{\min, r} = K_{\min, \theta} = K_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>K_{\max, r} = K_{\max, z} = 5,0 \times 10^6 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>K_{\max, \theta} = 5,0 \times 10^2 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  Máximo número de iterações: 100</p>

Tabela D.19 - Esquemas de otimização para bomba Tesla de entrada vertical com dois canais, para dissipação de energia, 0,5 L/min, razão de aspecto  $2,48 : 1$  ( $(15 - 2,6) : 5 = 12,4 : 5$ ), fração de fluido permitida **25%**, com eixo

0 rpm ~ 600 rpm	<p>Estimativa inicial para a distribuição de <math>\alpha</math> no domínio de projeto inteiro:  <math>\alpha_0(r, z) = 0</math> (sólido)</p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>f = 25\%</math>  <math>K_{\min, r} = K_{\min, \theta} = K_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>K_{\max, r} = K_{\max, z} = 5,0 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>K_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^2 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  Máximo número de iterações: 100</p>
700 rpm ~ 1000 rpm	<p><math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math></p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>f = 25\%</math>  <math>K_{\min, r} = K_{\min, \theta} = K_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>K_{\max, r} = K_{\max, z} = 5,0 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>K_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^2 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  Máximo número de iterações: 100</p>

Tabela D.20 - Esquemas de otimização para bomba Tesla de entrada vertical com dois canais, para dissipação de energia, 0,5 L/min, razão de aspecto 2,48 : 1 ((15 – 2,6) : 5 = 12,4 : 5), fração de fluido permitida **35%**, com eixo

0 rpm ~ 400 rpm	<p>Estimativa inicial para a distribuição de <math>\alpha</math> no domínio de projeto inteiro:  <math>\alpha_0(r, z) = 0</math> (sólido)</p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>f = 35\%</math></p> <p><math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^2 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math></p> <p>Máximo número de iterações: 100</p>
500 rpm ~ 600 rpm	<p><math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math></p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>f = 35\%</math></p> <p><math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 5,0 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^2 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math></p> <p>Máximo número de iterações: 100</p>
700 rpm	<p><math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math></p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>f = 35\%</math></p> <p><math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 8,0 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^2 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math></p> <p>Máximo número de iterações: 100</p>
800 rpm ~ 900 rpm	<p><math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math></p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>f = 35\%</math></p> <p><math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 1,0 \times 10^6 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^2 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math></p> <p>Máximo número de iterações: 100</p>
1000 rpm	<p><math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math></p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>f = 35\%</math></p> <p><math>\kappa_{\min, r} = \kappa_{\min, \theta} = \kappa_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>\kappa_{\max, r} = \kappa_{\max, z} = 6,0 \times 10^6 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>\kappa_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^2 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math></p> <p>Máximo número de iterações: 100</p>

Tabela D.21 - Esquemas de otimização para bomba Tesla de entrada vertical com dois canais, para dissipação de energia, 0,5 L/min, razão de aspecto 2,48 : 1 ((15 – 2,6) : 5 = 12,4 : 5), fração de fluido permitida 30%, **sem eixo**

0 rpm ~ 400 rpm	<p>→ Passo 1: Estimativa inicial para a distribuição de <math>\alpha</math> no domínio de projeto inteiro:  <math>\alpha_0(r, z) = 0</math> (sólido)</p> <p><math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>f = 30\%</math>  <math>K_{\min, r} = K_{\min, \theta} = K_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>K_{\max, r} = K_{\max, z} = 2,5 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>K_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^2 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  Máximo número de iterações: 50</p>	<p>→ Passo 2:  <math>q_r = q_\theta = q_z = 10,0</math>  Máximo número de iterações: 50</p>
500 rpm ~ 1000 rpm	<p><math>\alpha_0(r, z) = \alpha_{\text{otimizado para a rotação anterior}}(r, z)</math>  <math>q_r = q_\theta = q_z = 1,0</math>  <math>f = 30\%</math>  <math>K_{\min, r} = K_{\min, \theta} = K_{\min, z} = 0 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>K_{\max, r} = K_{\max, z} = 8,0 \times 10^5 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  <math>K_{\max, \theta} = 2,5 \times 10^1 \text{ kg/(m}^3\text{s)}</math>  Máximo número de iterações: 100</p>	

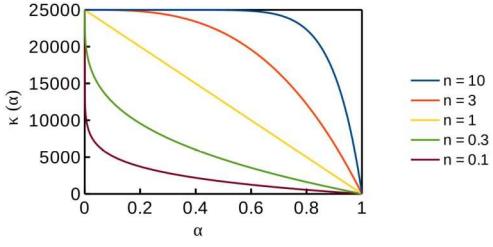
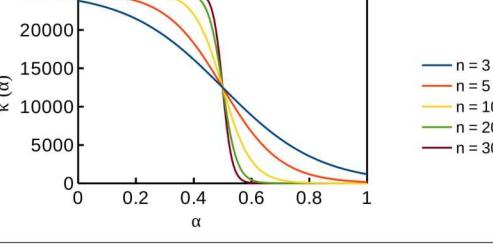
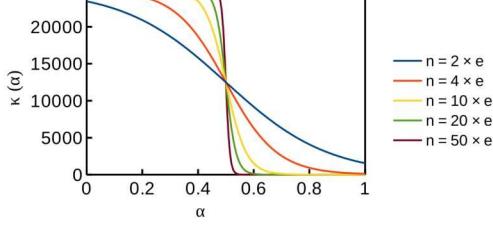
## APÊNDICE E – Variações no modelo de material

A seguir, comenta-se sobre algumas propostas de alternativas para inclusão do modelo de material em equações do problema de fluidos.

### E.1 MODELO DE MATERIAL

Existe a possibilidade de utilizar outros modelos de material além do modelo de material de Borrval e Petersson (2003), como o SIMP (“Solid Isotropic Material Penalization”), curvas sigmoidais etc. (ver a tabela E.1).

Tabela E.1 - Outros modelos de material que podem ser utilizados alternativamente ao modelo proposto por Borrval e Petersson (2003)

Modelo	Equação e gráfico exemplo com $\kappa_{máx} = 2,5 \cdot 10^4$ e $\kappa_{mín} = 2,5 \cdot 10^{-4}$
SIMP	$\kappa(\alpha) = \alpha^n \cdot \kappa_{mín} + (1 - \alpha^n) \cdot \kappa_{máx}$ 
Curva sigmoidal	Forma de tangente hiperbólica: $\kappa(\alpha) = \frac{\kappa_{máx}}{2} \cdot [\tanh(-(\alpha - 0,5) \cdot n) + 1] + \kappa_{mín}$ 
	Forma exponencial: $\kappa(\alpha) = \frac{\kappa_{máx}}{1 + e^{(\alpha - 0,5) \cdot n}} + \kappa_{mín}$ 

## E.2 IMPLEMENTAÇÃO DAS PENALIZAÇÕES

Quando sólido passa a ocupar determinada região do espaço durante a otimização topológica, pode-se considerar que as propriedades do material não são mais as do fluido e que a atuação de forças de corpo deve ser diferente. Assim, Pereira et al. (2016, p. 1355) propõe uma penalização linear na viscosidade dinâmica, substituindo-a pela seguinte equação:

$$\mu_\alpha(\alpha) = \mu \cdot [\epsilon \cdot (1 - \alpha) + \alpha] \quad (\text{E.1})$$

em que

$\epsilon$  : Limite inferior positivo para evitar viscosidade zero (no caso, foi assumido o valor  $4,0 \cdot 10^{-5}$ ).

Deng et al. (2013, p. 557) propõe uma penalização por regra de potência (“power law”) das forças de corpo inclusive forças de Coriolis e de inércia centrífuga (i.e., penalização nos termos que incluem a densidade,  $\rho$ ), substituindo-as pela seguinte equação (DENG et al., 2, 2013, p. 557):

$$f_{c,\alpha}(\alpha) = f_c \cdot \alpha^n \quad (\text{E.2})$$

em que

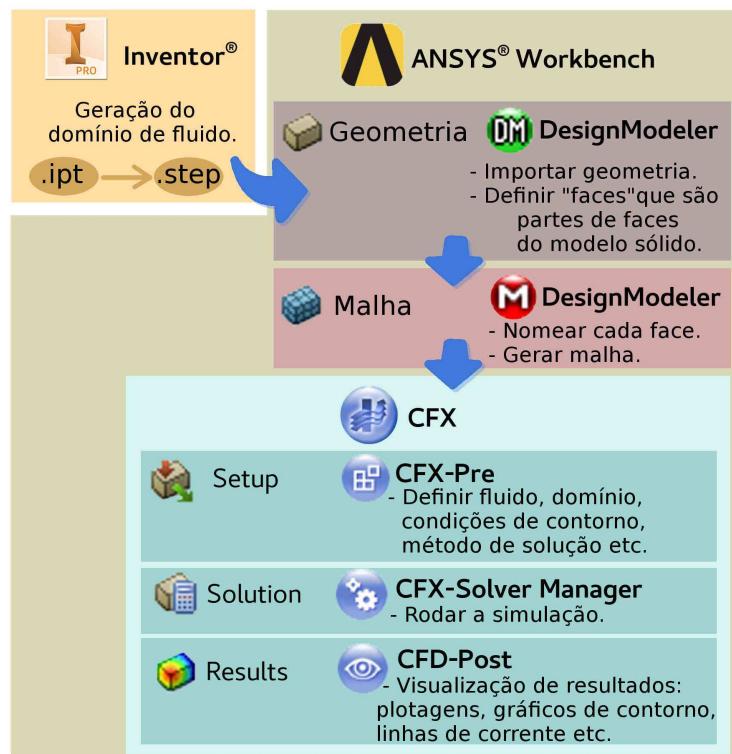
$f_c$  : Forças de corpo inclusive forças de Coriolis e de inércia centrífuga.

$n$  : Parâmetro de penalização, em que  $n \geq 1$ , mas não pode ser elevado demais, porque pode levar a uma penalização excessiva em valores de  $\alpha$  próximos de 1.

## APÊNDICE F – Implementação da modelagem e simulação no ANSYS® CFX

O procedimento seguido para modelagem e simulação no ANSYS® está condensado na figura F.1.

Figura F.1 - Procedimento seguido para modelagem e simulação no ANSYS® CFX



Fonte: Própria

O domínio de fluido é gerado no *software* Autodesk Inventor® 2017, convertendo o seu formato de arquivo (“.ipt”) para o formato padronizado “.step” (ISO 10303).

O projeto é organizado no ANSYS® Workbench, incluindo-se os componentes “Geometria” (“Geometry”), “Malha” (“Mesh”) e “CFX” (“CFX”). Apesar do ANSYS® Workbench possuir um componente único com todos esses componentes embutidos (“Fluid Flow (CFX)”), optou-se por tratá-los separadamente, devido à facilidade de visualização em caso de se incluir mais de uma simulação que use a mesma geometria e/ou malha.

No componente Geometria (“Geometry”) do ANSYS® Workbench, utilizando-se o *software* DesignModeler (no seu modo de edição de geometria), importa-se o domínio de fluido (em “.step”) (“Import External Geometry File...” > “Generate”). No caso de haver condições de contorno que não são definidas para uma face inteira da geometria, mas sim para trechos dela, é necessário definir essas “faces” no DesignModeler. No DesignModeler, cria-se um plano sobre a face desejada e elabora-se um *sketch* que, ao ser extrudado faça contato com a região que possui condição de contorno diferenciada. Assim, extruda-se o *sketch*. Para garantir que a geometria do domínio de fluido seja modelada como separada do sólido criado, deve-se assegurar que a operação (“Operation”) esteja como “Add Frozen” nos detalhes do domínio de fluido (“Details of Import”). Assim, seleciona-se no menu superior “Create”, “Body Operation” e “Imprint Faces” para o DesignModeler marcar a nova “face” na geometria. Fechando-se o DesignModeler, pode ser necessário atualizar a geometria no ANSYS® Workbench (para isso, clica-se com o botão da direta do *mouse* sobre o item editado > “Update”).

No componente Malha (“Mesh”) do ANSYS® Workbench, abre-se o *software* DesignModeler (no seu modo de edição de malha). Primeiramente, suprime-se o sólido criado para definir a nova “face” anteriormente. Em seguida, nomeiam-se todas as faces da geometria com nomes indicativos das condições de contorno que são aplicadas em cada uma delas (para isso, clicar com o botão da direta do *mouse* sobre uma face > “Insert” > “Named Selection”). Depois, define-se a malha como “Defaults” > “Physics Preference” > “CFD” e “Defaults” > “Solver Preference” > “CFX”, definem-se os parâmetros de discretização da malha (“mesh”) e clica-se em “Generate”. Fechando-se o DesignModeler, pode ser necessário atualizar a malha no ANSYS® Workbench, do mesmo modo feito para atualizar a geometria da malha.

No componente CFX do ANSYS® Workbench, há três módulos:

- CFX-Pre: Pré-processador, em que se define o fluido, o domínio, as condições de contorno, o método de solução etc. Pode-se usar o “Quick Setup Mode...” (em “Tools”) para ajudar a fazer as configurações mais básicas.

- CFX-Solver Manager: Resolvedor do sistema de equações, calculando todas as variáveis de interesse do problema. Ele roda a simulação.
- CFD-Post: Pós-processador, em que pode ser feita visualização de resultados, plotagens, gráficos de contorno, linhas de corrente etc.

Para definir perfis diferentes de entrada (como parabólico), é utilizado o recurso de expressões (“Expressions”) do ANSYS® CFX.

Para configurar o modelo 2D de escoamento girante a partir de uma malha em cunha, devem-se configurar fronteiras de periodicidade (“*periodic boundaries*”). Assim, utiliza-se, no CFX-Pre, a opção de incluir “Domain Interface” para as duas “faces 2D”, e escolhe-se a opção “Rotational Periodicity” em “Interface Models”, com relação ao eixo de rotação sendo utilizado.

No caso de se estar simulando em referencial rotativo (relativo) no ANSYS® CFX, deve-se definir, em “Domain Motion” (na aba “Outline” > “Basic Settings”), o domínio como sendo rotativo (“Option” > “Rotating”), com a rotação sendo a dos discos (dada em [rev min<sup>-1</sup>] (rpm), por exemplo). Define-se também o eixo de rotação, em “Axis Definition”, como “Coordinate Axis” (em “Option”) e “Global Z” (em “Rotation Axis”). Se for um eixo de rotação diferente de “Global Z” (eixo z do sistema de coordenadas cartesiano), especifica-se esse outro eixo.

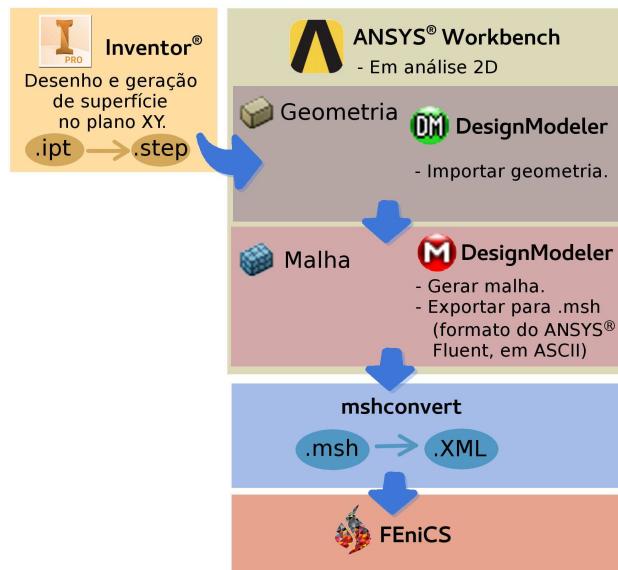
Assim, todos os valores das condições de contorno devem ser fornecidos no ANSYS® CFX com os seus valores no referencial relativo (“*rotating frame*”), ou seja, especificar velocidade nula (0) no referencial relativo significa velocidade  $\omega \cdot r \cdot e_\theta$  no referencial absoluto. Para especificar velocidade nula no referencial absoluto, deve-se impor  $-\omega \cdot r \cdot e_\theta$  na velocidade tangencial, o que pode ser feito por meio de uma expressão (“Expression”):  $-\omega \cdot r$ . (em que omega é a rotação do sistema relativo).

Nos resultados da simulação (CFD-Post), o ANSYS® CFX permite a visualização dos resultados no referencial relativo e no referencial absoluto. As variáveis no referencial absoluto são referidas por “Stn Frame” (“Stationary Frame”).

## F.1 GERAÇÃO DE MALHA 2D NO ANSYS® PARA SIMULAÇÃO NO FEniCS

É possível gerar um arquivo de malha com o ANSYS® para usar no FEniCS. A vantagem é a possibilidade de utilizar malhas de formatos mais complexos no FEniCS, porque o FEniCS só consegue gerar malhas de geometria simples no máximo com algumas formas geométricas em CSG (“Constructive Solid Geometry”). Apesar de ser possível fazer toda a geração de malha no ANSYS®, optou-se por utilizar o Autodesk Inventor® 2017 para desenho da geometria que serve de base para a geração de malha. Na versão 2017 do Autodesk Inventor® ainda não é possível exportar diretamente uma malha para um arquivo de malha. O procedimento seguido para pode ser visto na figura F.2.

Figura F.2 - Procedimento seguido para geração de malha 2D para simulação no FEniCS



Fonte: Própria

Para gerar uma geometria 2D no Autodesk® Inventor reconhecível pelo ANSYS®, ela deve ser uma superfície e estar inteiramente no plano XY. No Autodesk® Inventor, cria-se primeiro um “*sketch*”, extrudando-o até uma dada espessura bem fina para cima e para baixo do “*sketch*” na mesma proporção para garantir que o plano médio do sólido esteja no plano XY. Em seguida, abre-se a seção de “*Stress Analysis*” (na aba “*3D Model*” > “*Simulation*”). Criando

uma simulação (“Manage” > “Create Study” > “OK”), prepara-se uma superfície intermediária (“Prepare” > “Midsurface” > clicar com o botão da direita no sólido > “Select Other...” > “Solid1”). Em seguida, abre-se a aba “Manage” > “Layout” > “Make Part” (selecionar somente o item embaixo de “Surface Bodies”, desativando “Place part in target assembly” e selecionando o nome de destino em “Part name”), para gerar um arquivo “.ipt” com a superfície intermediária. Salvando-se esse arquivo gerado em “.step”, é possível importá-lo no ANSYS®.

No ANSYS®, deve-se escolher, primeiramente o tipo de análise como sendo 2D (“Tools” > “Options” > “Geometry Import” > “Advanced Options” > “Analysis Type” > “2D”). No componente Geometria (“Geometry”) do ANSYS® Workbench (DesignModeler), importa-se o arquivo “.step”. No componente Malha (“Mesh”) do ANSYS® Workbench (DesignModeler), altera-se a malha para elementos triangulares, os quais o FEniCS atualmente consegue processar, (“Mesh” > “Mesh Control” > “Method” > “Geometry” > selecionar a superfície > “Method” > “Triangles”) e clica-se para gerá-la.

Antes de exportar a malha para um arquivo, entra-se nas opções de exportação do ANSYS® para gerar arquivo ASCII e não binário (“Tools” > “Options” > “Meshing” > “Export” > “ANSYS FLUENT” > “Format of Input File (\*.msh)” > “ASCII”). Assim, exporta-se a malha para “FLUENT Input Files (\*.msh)”.

Para converter do formato do ANSYS® Fluent para “.XML” (formato de malha reconhecido pelo FEniCS), pode-se utilizar a biblioteca de Python `mshconvert` (MSHCONVERT), que usa o FEniCS nessa conversão. Foram feitas duas adaptações no código original dessa biblioteca, que podem ser vistas a seguir, para a versão atual do ANSYS® Fluent.

## F.2 CONVERSÃO DE ARQUIVO DE MALHA DO ANSYS® PARA O FENICS

Para converter do formato do ANSYS® Fluent para “.XML” (formato de malha reconhecido pelo FEniCS) usando-se a biblioteca de Python `mshconvert` (MSHCONVERT), foram feitas duas adaptações no código original:

- Na função “`read_zone_nodes(dim, Nmin, Nmax, ifile)`” do arquivo `mshconvert.py`, substituiu-se parte do código logo após “`global nodes`”, porque o uso da variável global “`nodes`” estava sendo confundido com o de variável local, o que causava a variável global “`nodes`” possuir somente a última parte dos nós que foi computada. A alteração pode ser vista abaixo.

Antes:

```
242     global nodes
243     nodes = zeros((dim, Nmax - Nmin + 1))
244     for i in range(Nmin, Nmax + 1):
245         if readline:
246             line = ifile.readline()
247             readline = True
248         nodes[:, i - Nmin] = [eval(x) for x in line.split()]
```

Depois:

```
global nodes
nodes_ = zeros((dim, Nmax - Nmin + 1))

for i in range(Nmin, Nmax + 1):
    if readline:
        line = ifile.readline()
        readline = True
    nodes_[:, i - Nmin] = [eval(x) for x in line.split()]

if type(nodes).__name__ != 'ndarray':
    nodes = nodes_
else:
    nodes = np.column_stack((nodes, nodes_))
```

- Na função “write\_fenics\_file(dim, ofilename)” do arquivo mshconvert.py, substituiu-se parte do código, porque havia alguma confusão no uso de “mesh.domains().markers(dim - 1)” na versão atual do FEniCS. A alteração pode ser vista abaixo.

Antes:

```

1303     def write_fenics_file(dim, ofilename):
1304         ofile = File(ofilename + '.xml')
1305         mesh = Mesh()
1306
1307         ...
1308
1309         mesh.order()
1310         mvc = mesh.domains().markers(dim-1)
1311         for zone, faces in boundary_faces.iteritems():
1312             for face in faces:
1313                 cell = face_list[face][2][0]
1314                 dolfin_cell = Cell(mesh, cell-1)
1315                 nodes_of_cell = dolfin_cell.entities(0)
1316                 nodes_of_face = array(face_list[face][1]) - 1
1317                 for jj, ff in enumerate(facets(dolfin_cell)):
1318                     facet_nodes = ff.entities(0)
1319                     if all(map(lambda x: x in nodes_of_face, facet_nodes)):
1320                         local_index = jj
1321                         break
1322                 mvc.set_value(cell-1, local_index, zone)
1323
1324         ofile << mesh
1325         from dolfin import plot
1326         plot(mesh, interactive=True)

```

Depois:

```

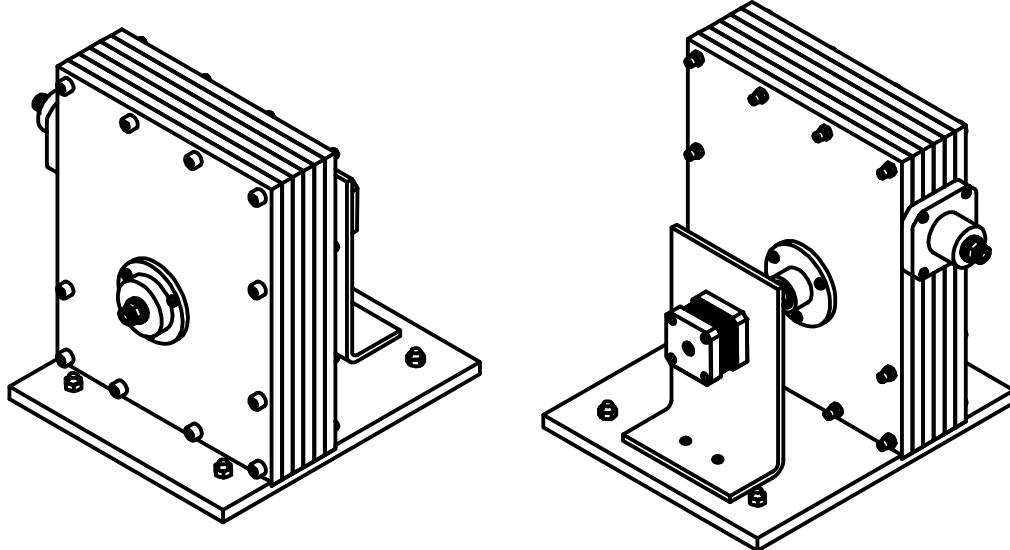
def write_fenics_file(dim, ofilename):
    mesh = Mesh()
    ...
    mesh.order()
    # Save mesh to file
    File(ofilename + '.pvf') << mesh      # Generate .pvf file to view in ParaView
    File(ofilename + '.xml') << mesh        # Generate .xml file to use in FEniCS

```

Antes de utilizar a função “mshconvert” para conversão com os ajustes feitos, deve-se remover inteiras as linhas de comentário inicial geradas pelo ANSYS® (“(0 grid written by ANSYS Meshing [...] )”).

## **APÊNDICE G – Desenhos técnicos**

A seguir estão os desenhos técnicos de conjunto e de fabricação dos protótipos de bomba Tesla de CDs e de mini bomba Tesla.

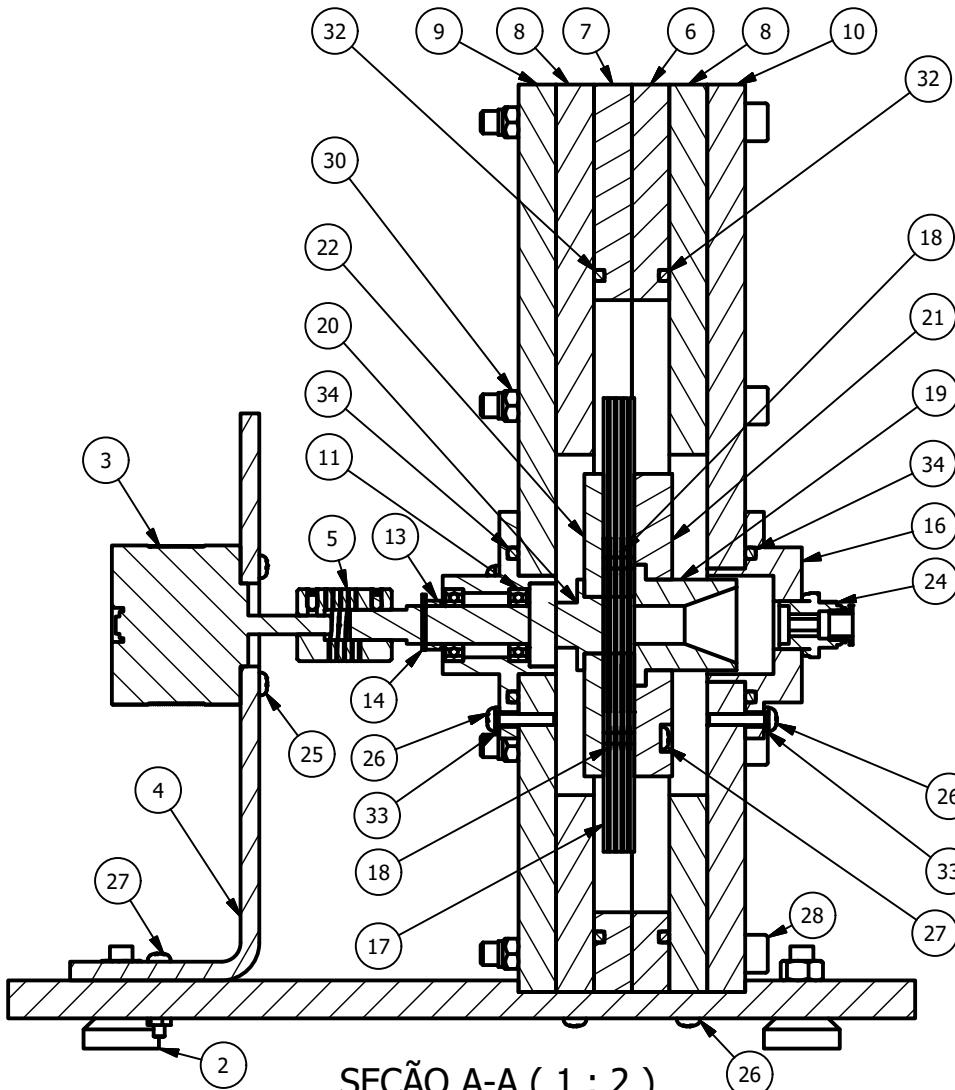
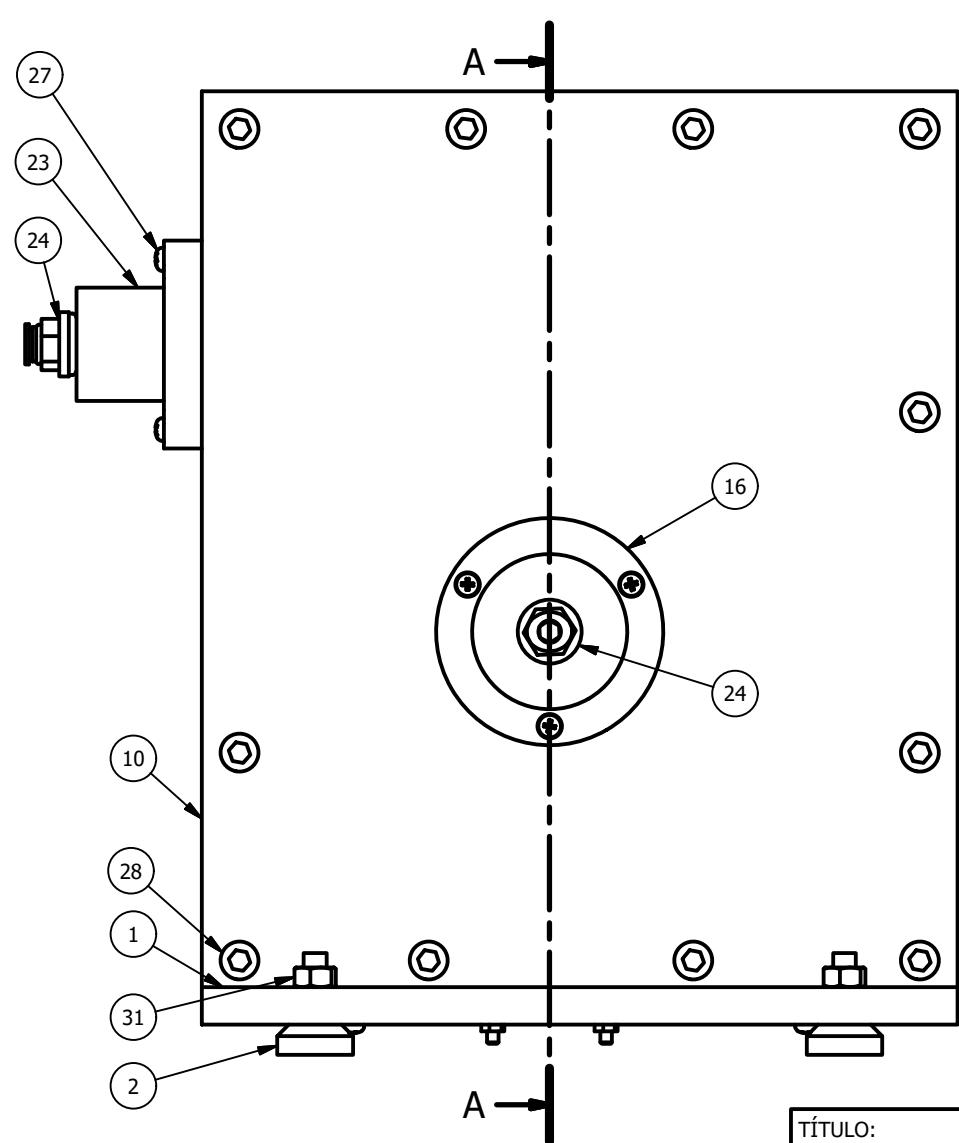


Nº	NOME	QUANTIDADE	MATERIAL
35	O'ring de diâmetro interno 43,00 mm e diâmetro do cordão 3,00 mm	1	Silicone
34	O'ring de diâmetro interno 35,00 mm e diâmetro do cordão 3,00 mm	2	Silicone
33	Arruela de borracha	6	Borracha nitrílica
32	Cordão O'ring - diâmetro 3 mm	2	Silicone
31	Porca M6 do pé de borracha	4	Aço
30	Porca autotratante M5 x 0.8	11	Aço
29	Porca M3	2	Aço
28	Parafuso Allen M6 x 70	11	Aço
27	Parafuso M3 x 20	9	Aço
26	Parafuso M3 x 16	10	Aço
25	Parafuso M3 x 8	4	Aço
24	Conector pneumático de engate rápido para tubo de diâmetro 6 mm e rosca NPT1/4	2	-
23	Bocal de saída	1	Alumínio
22	Flange do eixo de entrada	1	Acrílico
21	Flange do eixo conectado ao motor	1	Alumínio
20	Eixo-motor	1	Alumínio
19	Eixo de entrada	1	Alumínio
18	Espaçador de CDs	12	Polímero
17	CD	5	-
16	Canal de entrada	1	Alumínio
15	Retentor RS R5 12 x 22 x 7	1	Borracha
14	Anel de retenção DIN 471 - 10x1	1	Aço
13	Apoio externo do porta-rolamentos	1	Alumínio
12	Porta-rolamentos	1	Alumínio
11	Mancal de rolamento 6800 com vedação	2	-
10	Tampa (2/2)	1	Acrílico
9	Verso da voluta (2/2)	1	Acrílico
8	Verso da voluta / tampa (1/2)	2	Acrílico
7	Voluta (2/2)	1	Acrílico
6	Voluta (1/2)	1	Acrílico
5	Acoplamento 8x5	1	Aço
4	Suporte do motor	1	Alumínio
3	Motor de passo NEMA17	1	Motor
2	Apoio da base (pé de borracha)	4	Aço+borracha
1	Base	1	Acrílico

TÍTULO:

### BOMBA TESLA DE CDs - DESENHO DE CONJUNTO (1/4)

NOME: DIEGO HAYASHI ALONSO				NÚMERO USP: 8038128			
FOLHA: A4	ESCALA: 1:5	UNIDADES: mm	DATA: 02/11/2017	NÚMERO DA FOLHA: 1	MATERIAL: -	QUANTIDADE: -	1º DIEDRO: 



## SEÇÃO A-A ( 1 : 2 )

TÍTULO:  
BOMBA TESLA DE CDs - DESENHO DE CONJUNTO (2/4)

NOME:

NÚMERO USP:  
8038128

FOLHA: ESCA

LA: UNIDADE

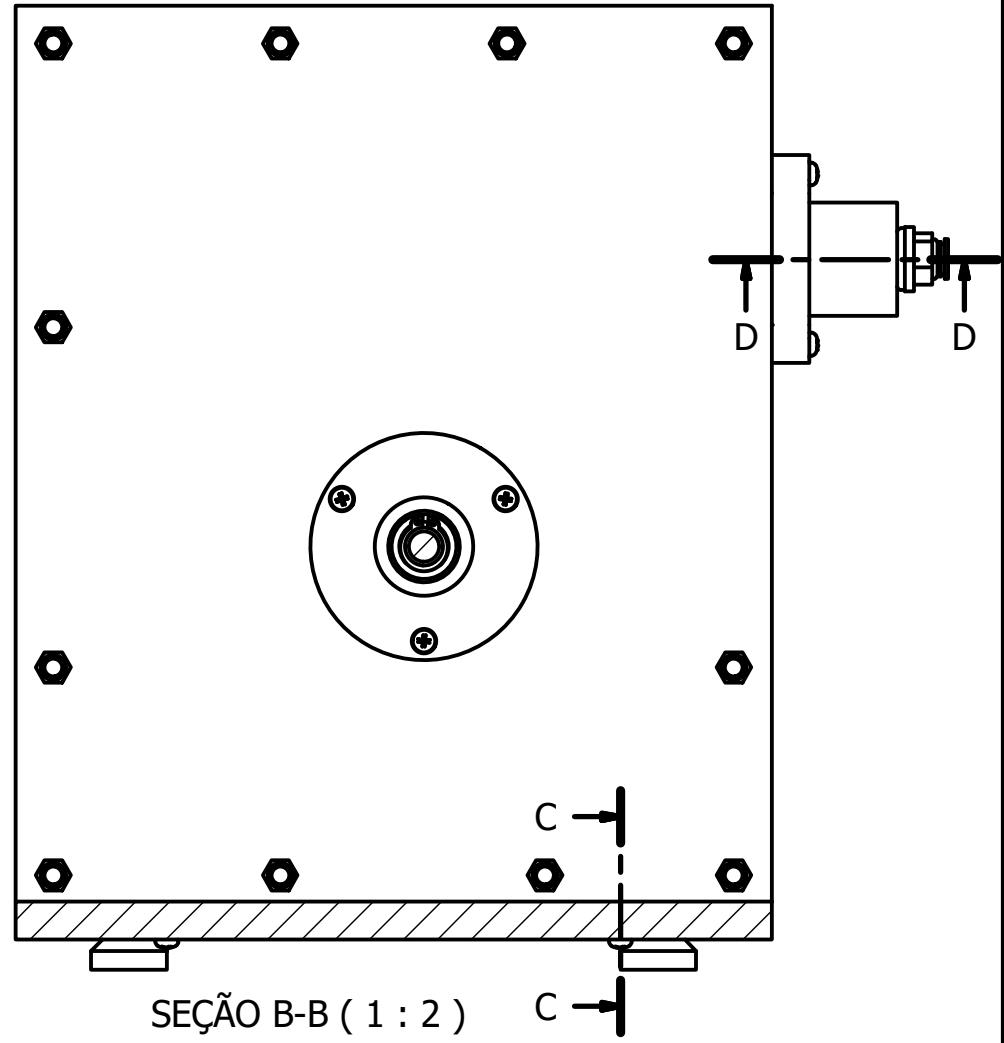
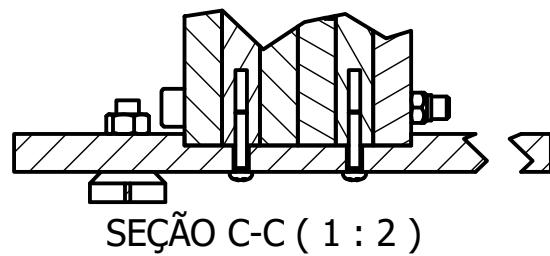
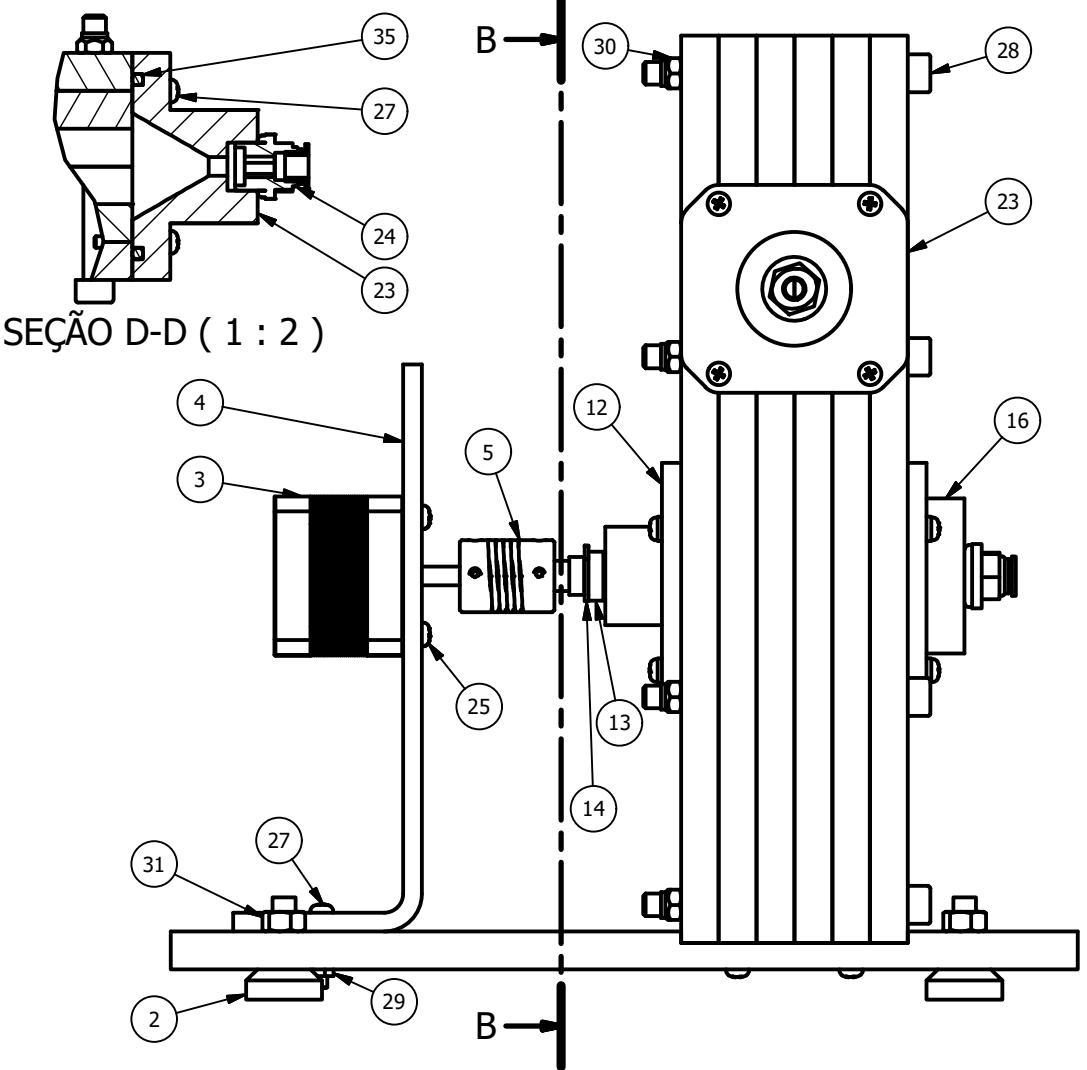
: DATA:

2017 3

..: MATERIAL:

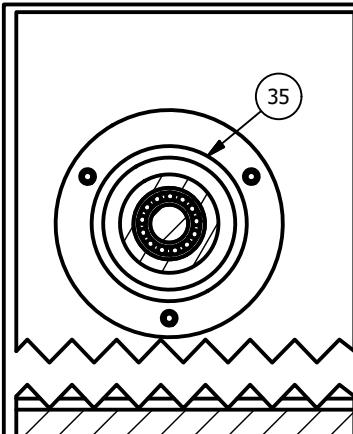
### QUANTIDADE

### 1º DIEDRO:

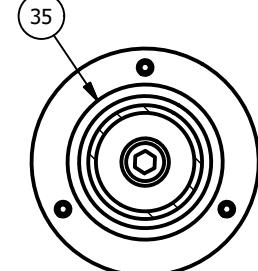
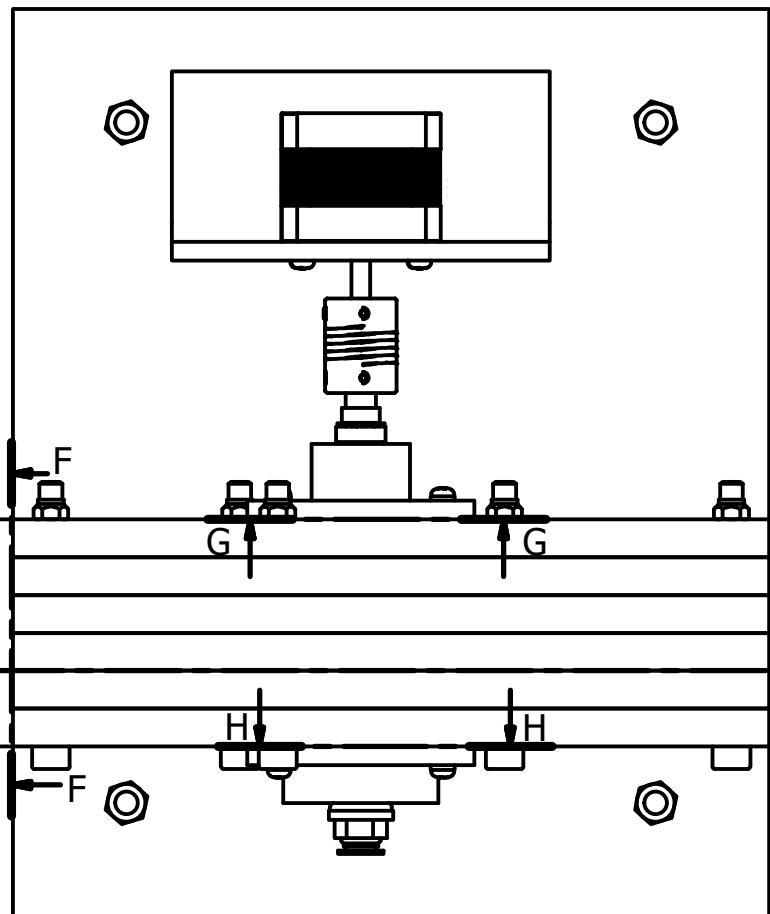


TÍTULO:  
BOMBA TESLA DE CDs - DESENHO DE CONJUNTO (3/4)

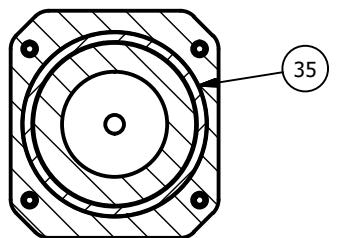
NOME: DIEGO HAYASHI ALONSO				NÚMERO USP: 8038128	
FOLHA:	ESCALA:	UNIDADES:	DATA:	NÚMERO DA FOLHA:	MATERIAL:
A4	1:2	mm	02/11/2017	3	-
			QUANTIDADE:	1º DIEDRO:	
			-	-	



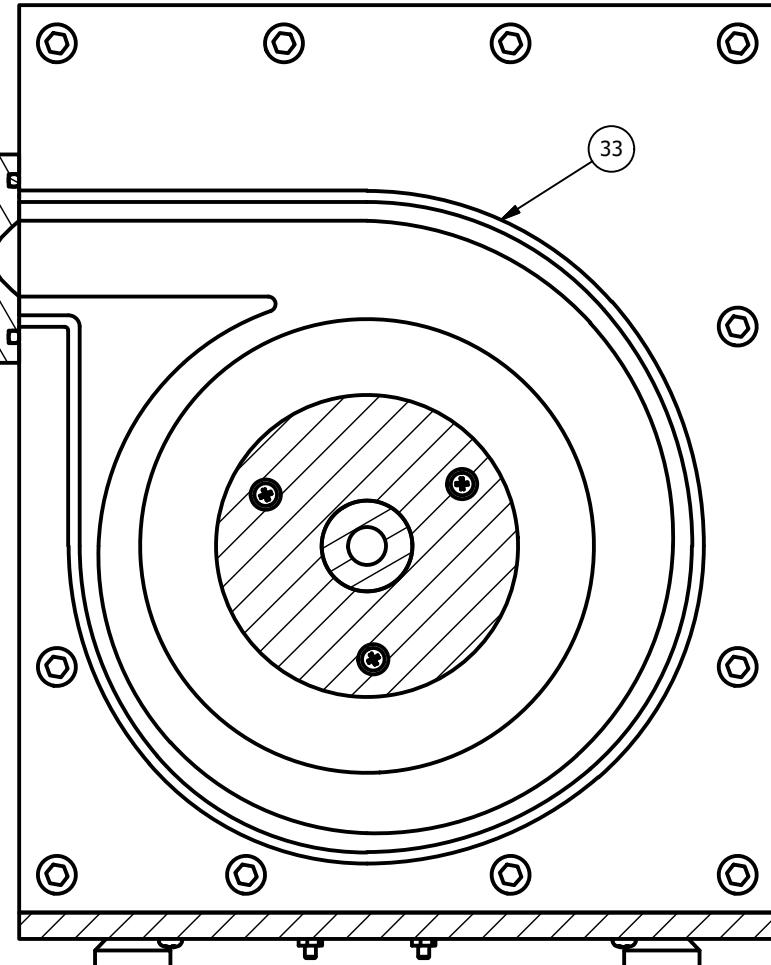
SEÇÃO G-G ( 1 : 2 )



SEÇÃO H-H ( 1 : 2 )



SEÇÃO F-F ( 1 : 2 )



SEÇÃO E-E ( 1 : 2 )

TÍTULO:

BOMBA TESLA DE CDs - DESENHO DE CONJUNTO (4/4)

NOME:

DIEGO HAYASHI ALONSO

NÚMERO USP:

8038128

FOLHA:

ESCALA:

UNIDADES:

DATA:

NÚMERO DA FOLHA:

MATERIAL:

QUANTIDADE:

1º DIEDRO:

A4

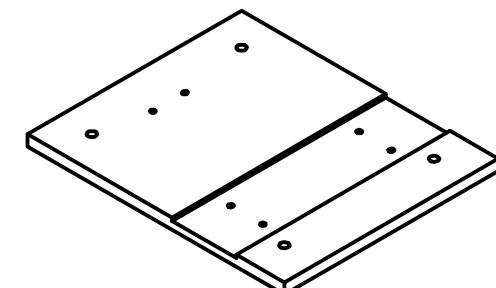
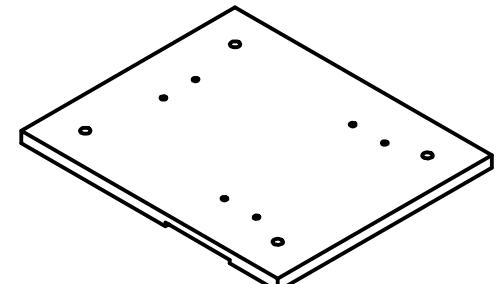
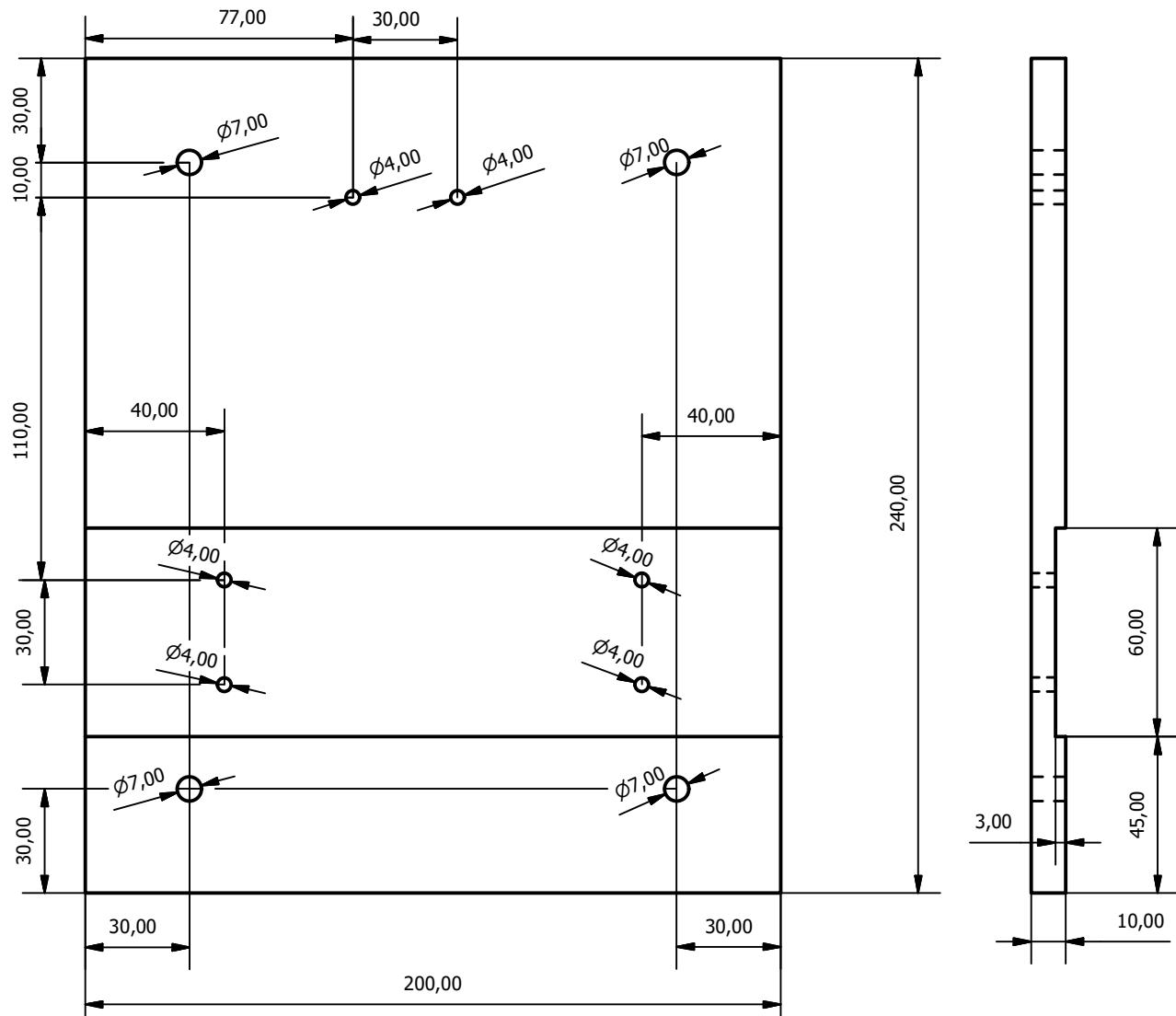
1:2

mm

02/11/2017

4





Tolerância geral de rugosidade (quando não há valor indicado):  $1,6$  ✓

Tolerância geral de dimensão (quando não há valor indicado):  $\pm 0,02$

TÍTULO:

BOMBA TESLA DE CDs - DESENHO DE FABRICAÇÃO - BASE

NOME:

DIEGO HAYASHI ALONSO

NÚMERO USP:

8038128

FOLHA:

A4

ESCALA:

1:2

UNIDADES:

mm

DATA:

02/11/2017

NÚMERO DA FOLHA:

5

MATERIAL:

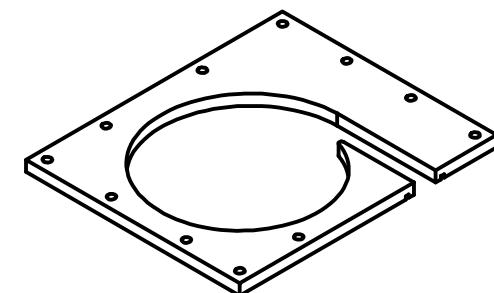
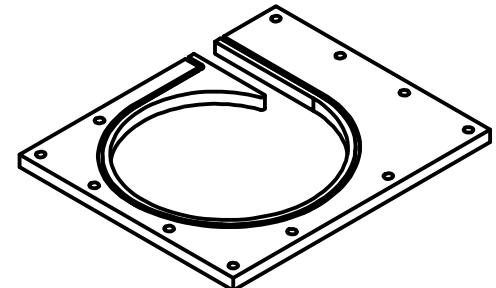
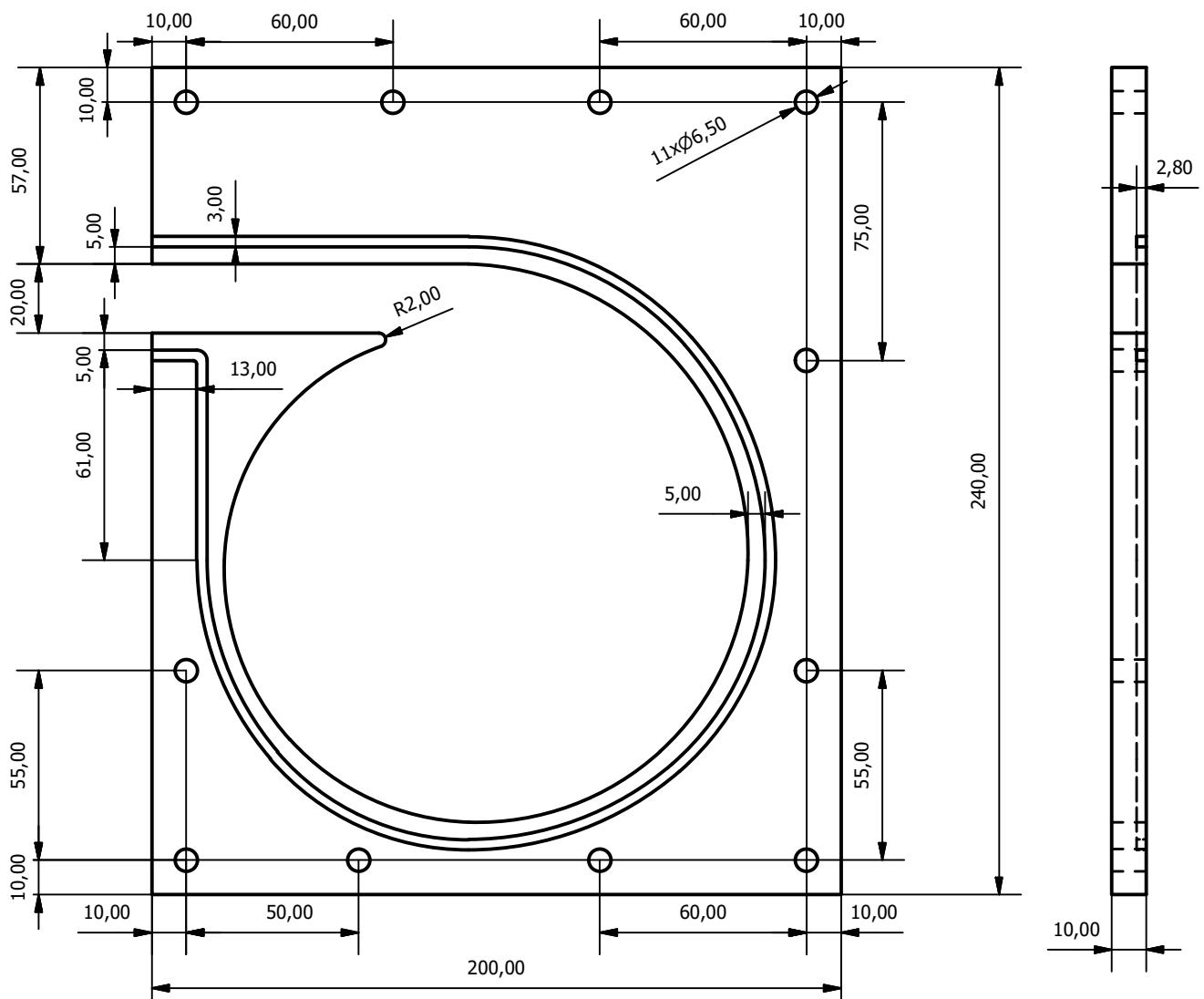
ACRÍLICO

QUANTIDADE:

1

1º DIEDRO:





Tolerância geral de rugosidade (quando não há valor indicado): **1,6** ✓

Tolerância geral de dimensão (quando não há valor indicado):  $\pm 0,02$

TÍTULO:  
BOMBA TESLA DE CDs - DESENHO DE FABRICAÇÃO - VOLUTA (1/2)

NOME:

NÚMERO USP:  
8038128

FOLHA:  
M

ESCALA: UM

### IDIADES:

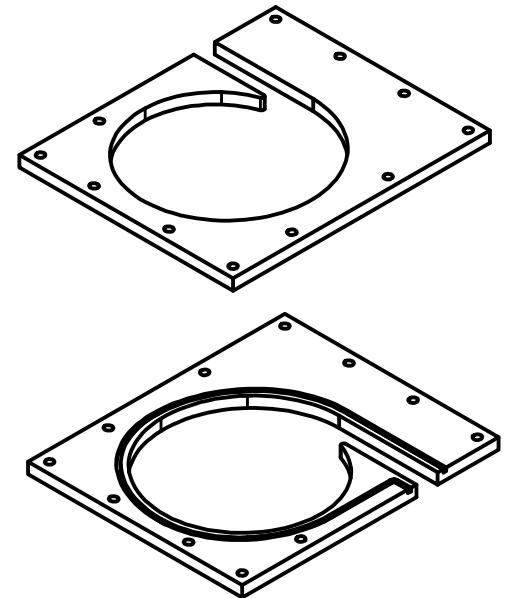
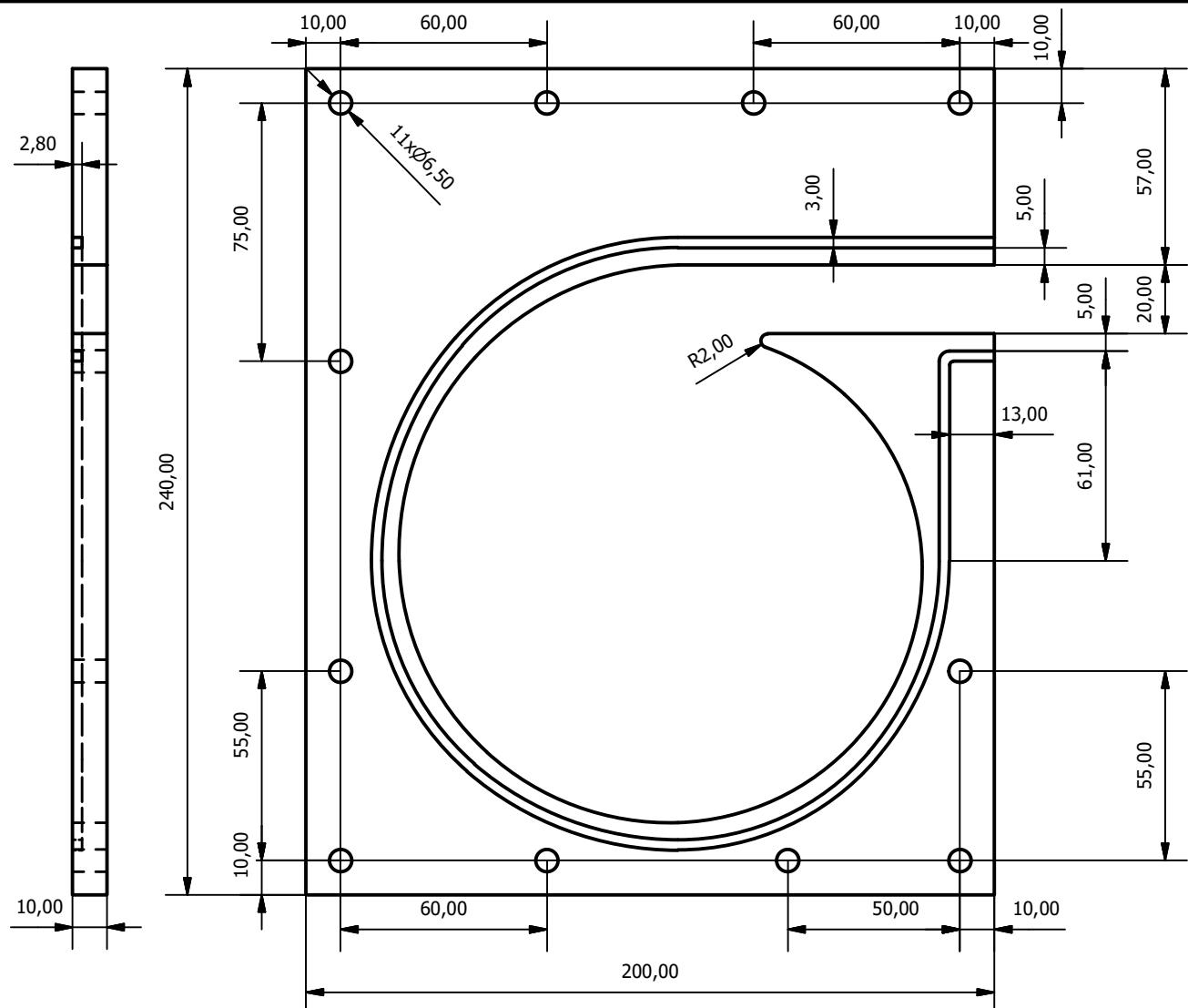
DATA:

NÚMERO DA FOLHA:  
17 6

MATERIAL:  
**ACRÍLICO**

QUANTIDADE



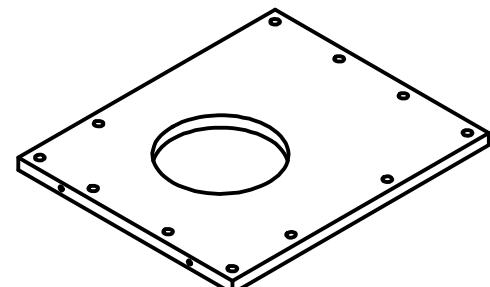
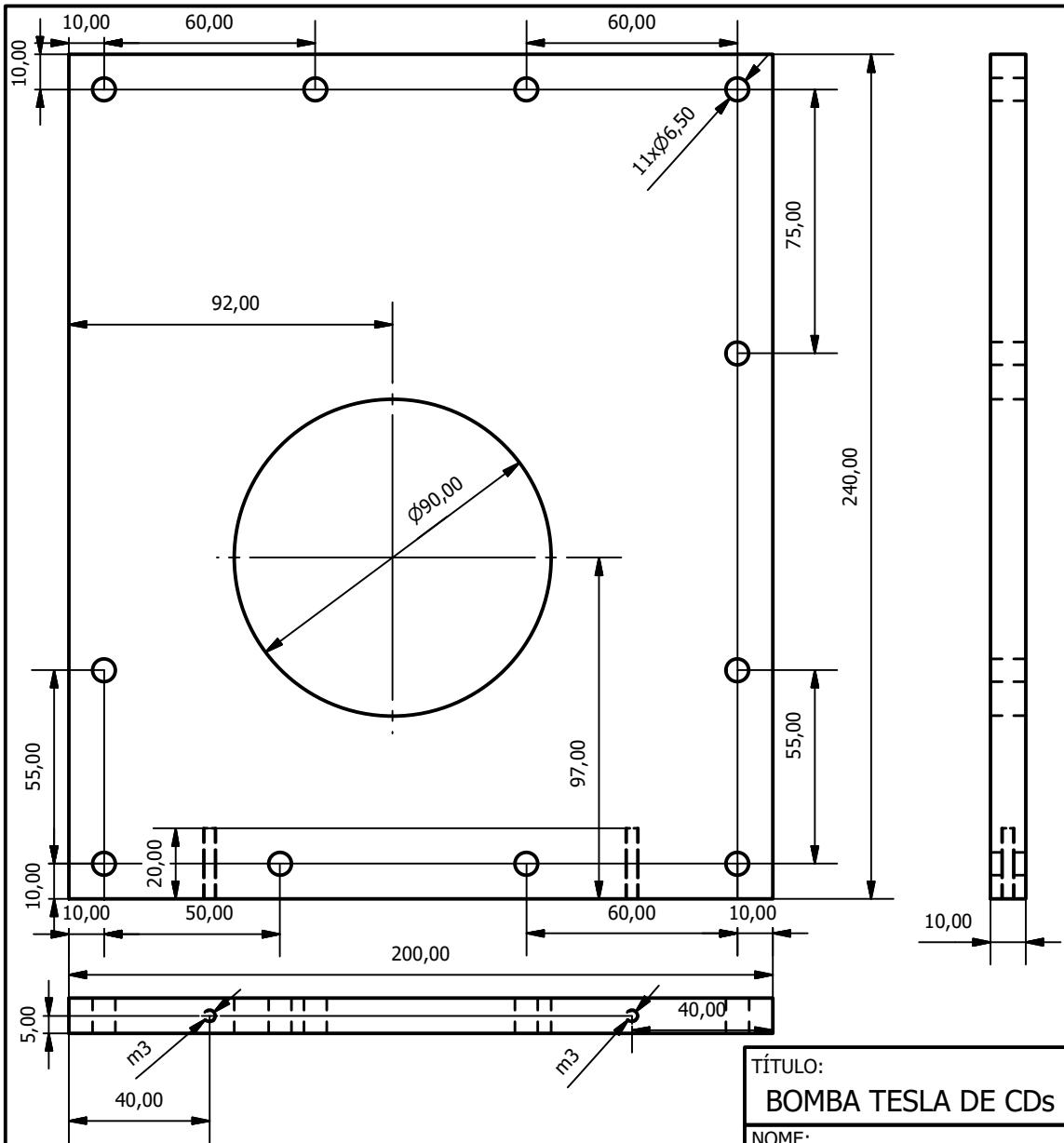


Tolerância geral de rugosidade (quando não há valor indicado): 1,6  
(Manfè et al., vol. 3, 2004, p.22)

Tolerância geral de dimensão (quando não há valor indicado):  $\pm 0,02$

**TÍTULO:**  
**BOMBA TESLA DE CDs - DESENHO DE FABRICAÇÃO - VOLUTA (2/2)**

<b>NOME:</b> <b>DIEGO HAYASHI ALONSO</b>	<b>NÚMERO USP:</b> <b>8038128</b>						
<b>FOLHA:</b> A4	<b>ESCALA:</b> 1:2	<b>UNIDADES:</b> mm	<b>DATA:</b> 02/11/2017	<b>NÚMERO DA FOLHA:</b> 7	<b>MATERIAL:</b> ACRÍLICO	<b>QUANTIDADE:</b> 1	<b>1º DIEDRO:</b>



Tolerância geral de rugosidade (quando não há valor indicado): **1,6** ✓  
(Manf   et al., vol. 3, 2004, p.22)

Tolerância geral de dimensão (quando não há valor indicado):  $\pm 0,02$

**TÍTULO:** BOMBA TESLA DE CDs - DESENHO DE FABRICAÇÃO - VERSO DA VOLUTA/TAMPA (1/2)

**NOME:**

DIEGO HAYASHI ALONSO

NÚMERO USP:

8038128

FOI HA

ESCALA:

## UNIDADES:

**DATA:**

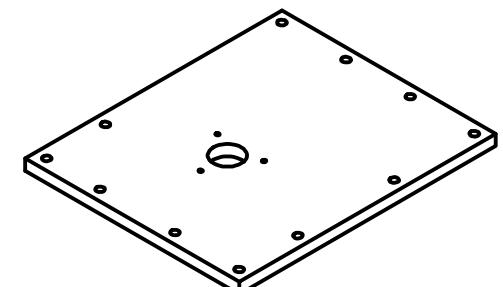
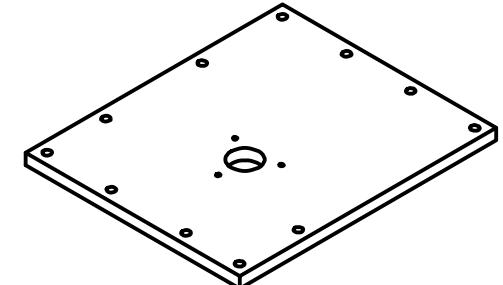
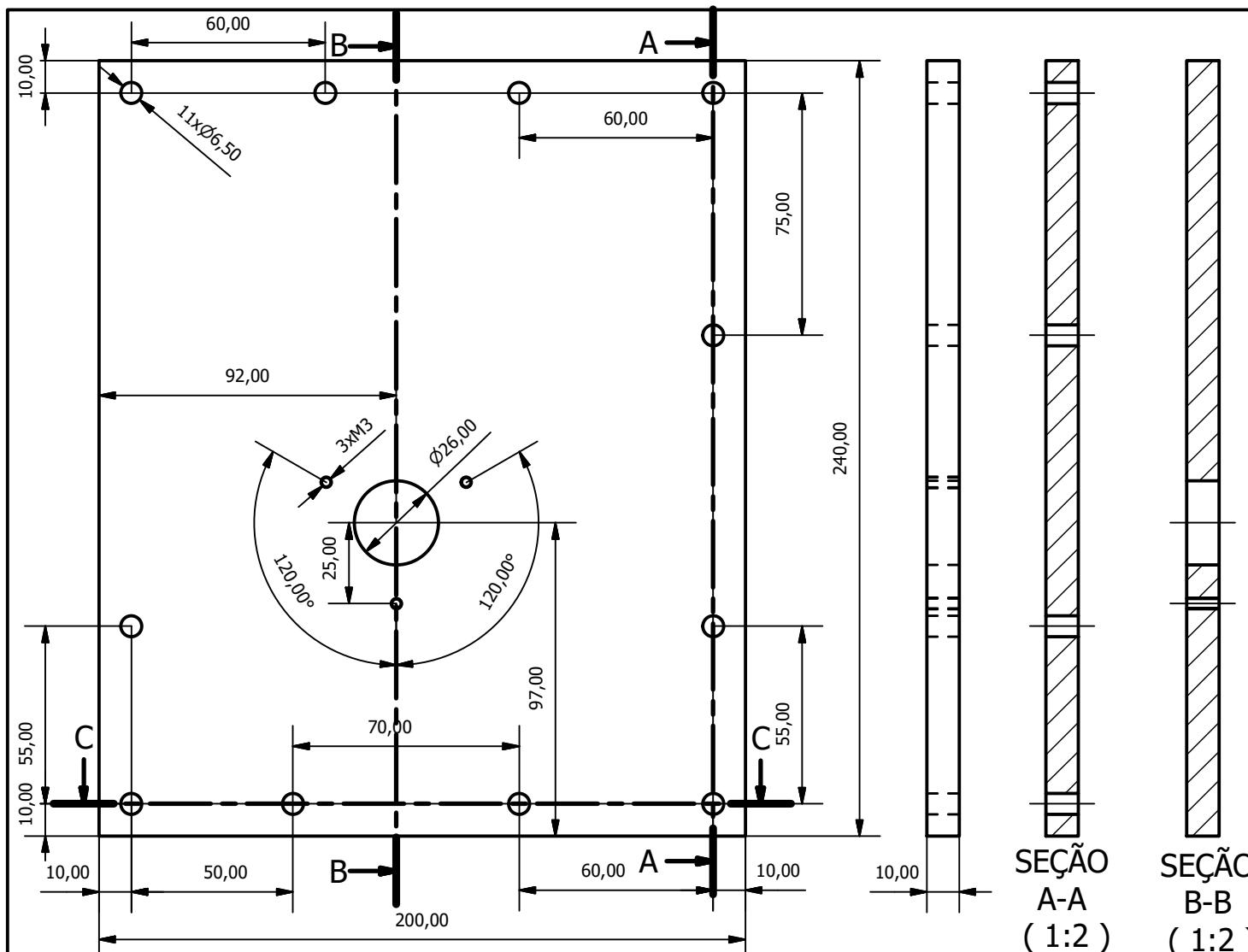
NÚMERO DA FOLHA

## MATERIAL:

## QUANTIDADE

: 1º DIFDRO:





Tolerância geral de rugosidade (quando não há valor indicado): 1,6/ (Manfio et al., vol. 3, 2004, p.22)

Tolerância geral de dimensão (quando não há valor indicado):  $\pm 0,02$

TÍTULO:  
BOMBA TESLA DE CDs - DESENHO DE FABRICAÇÃO - VERSO DA VOLUTA (2/2)

**NOME:**

DIEGO HAYASHT ALONSO

NÚMERO USR:

NOT IERO 8038128

DEZ 10 2018

SCALA: UNIT

ADRES: DAT

VÍDEO

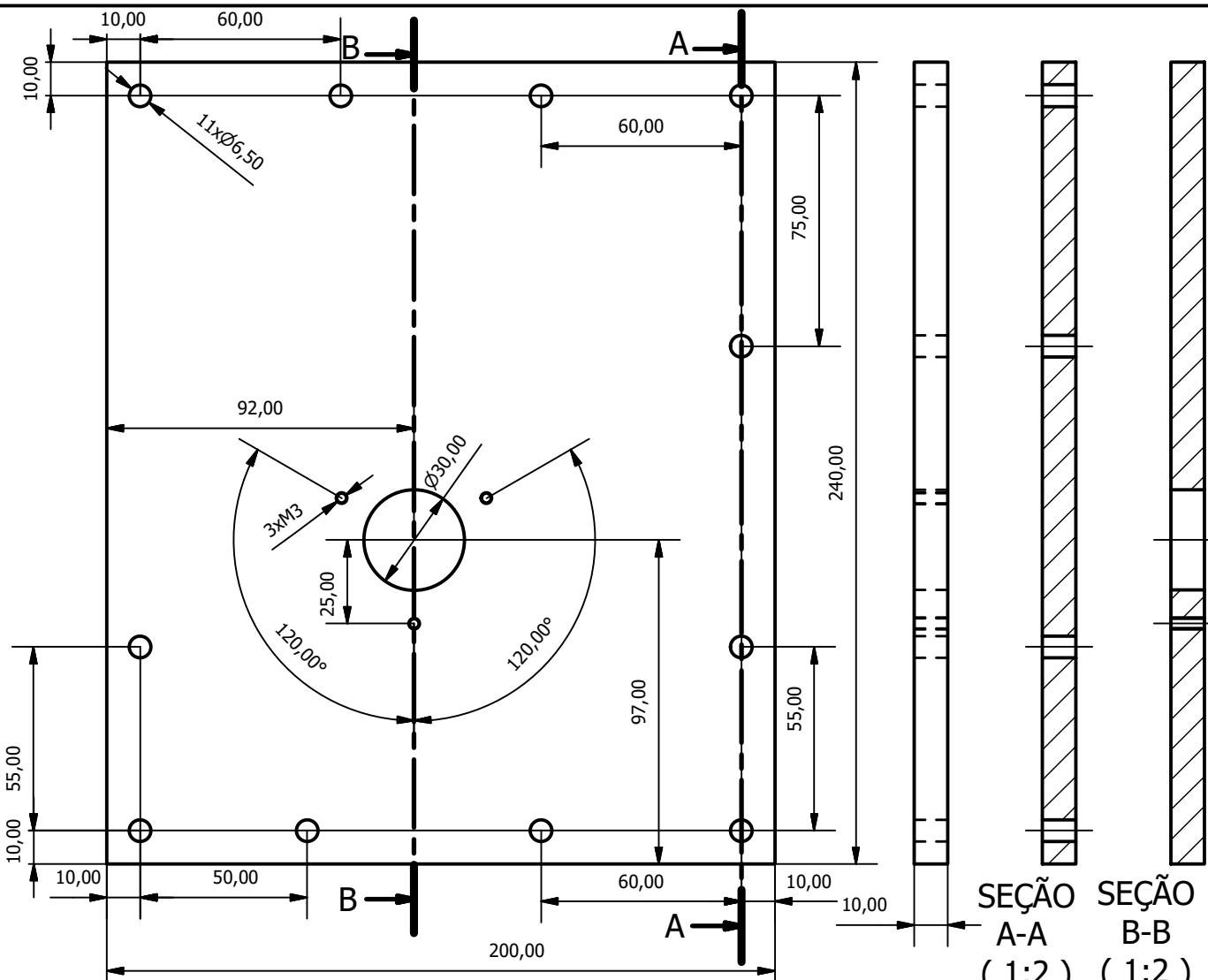
MERGENDA EQUUM

8058128

## QUANTIDADE

19 DIEDRO

## SEÇÃO C-C ( 1:2 )



Tolerância geral de rugosidade (quando não há valor indicado): 1,6  
(Manfö et al., vol. 3, 2004, p.22)

Tolerância geral de dimensão (quando não há valor indicado):  $\pm 0,02$

**TÍTULO:**  
**BOMBA TESLA DE CDs - DESENHO DE FABRICAÇÃO - TAMPA (2/2)**

NOME:  
DIEGO HAYASHI ALONSO

NÚMERO USP:  
8038128

FOLHA  
M

ESCALA:

## UNIDADES

DATA:

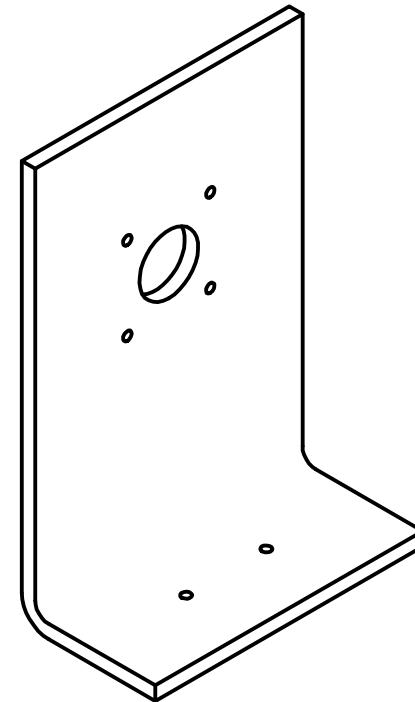
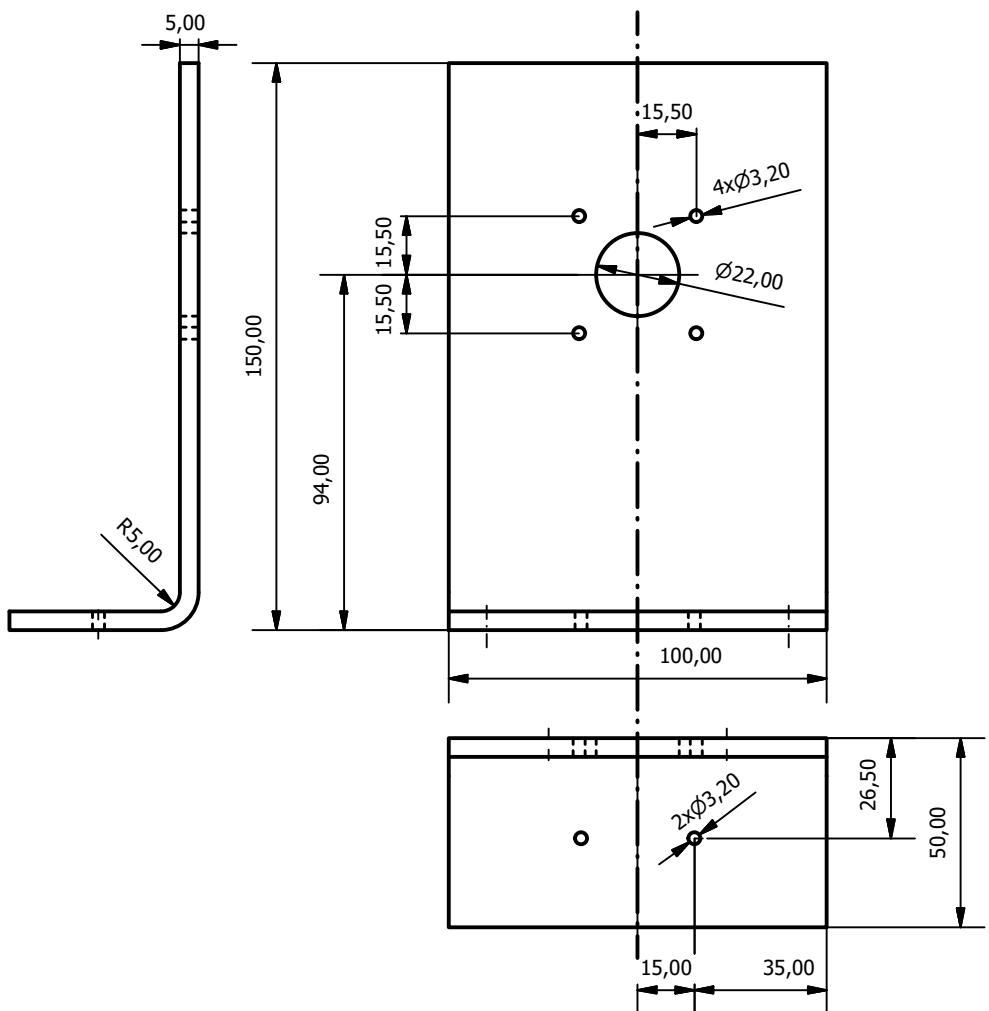
2017

ERO DA FOLHA

**MATERIAL:**

1

### 1º DIEDRO:



Tolerância geral de rugosidade (quando não há valor indicado):  $1,6$  ✓  
(Manfê et al., vol. 3, 2004, p.22)

Tolerância geral de dimensão (quando não há valor indicado):  $\pm 0,02$

TÍTULO:

BOMBA TESLA DE CDs - DESENHO DE FABRICAÇÃO - SUPORTE DO MOTOR

NOME:

DIEGO HAYASHI ALONSO

NÚMERO USP:

8038128

FOLHA:

A4

ESCALA:

1:2

UNIDADES:

mm

DATA:

02/11/2017

NÚMERO DA FOLHA:

11

MATERIAL:

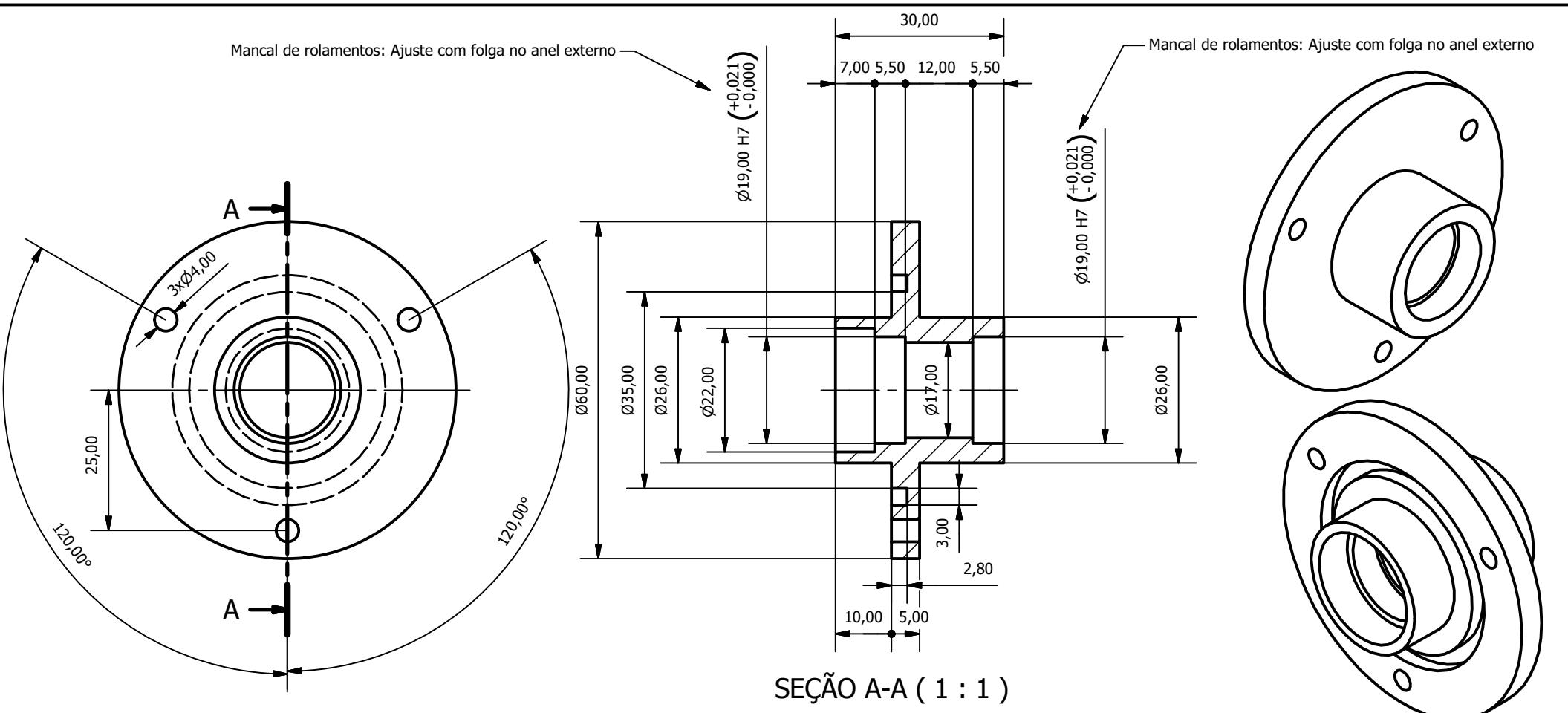
**ALUMÍNIO**

QUANTIDADE:

1

1º DIEDRO:

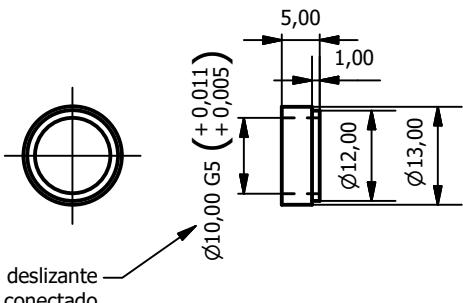




Tolerância geral de rugosidade (quando não há valor indicado): 1,6  
(Manfº et al., vol. 3, 2004, p.22)

Tolerância geral de dimensão (quando não há valor indicado): ±0,02

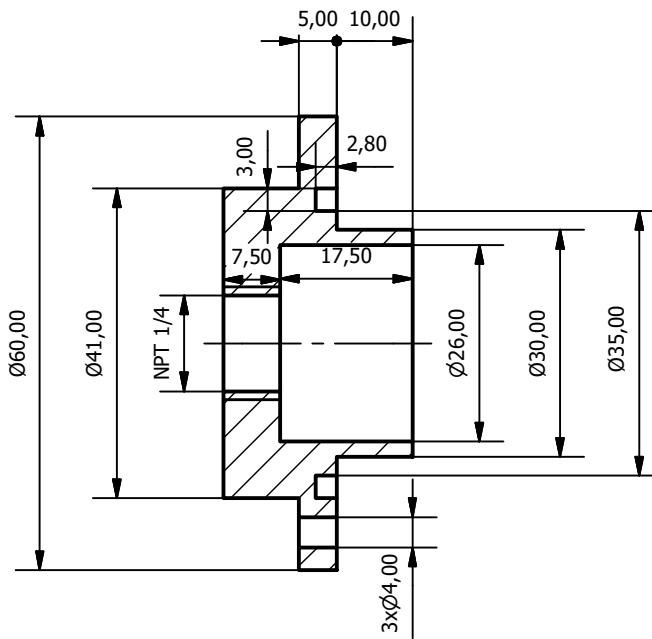
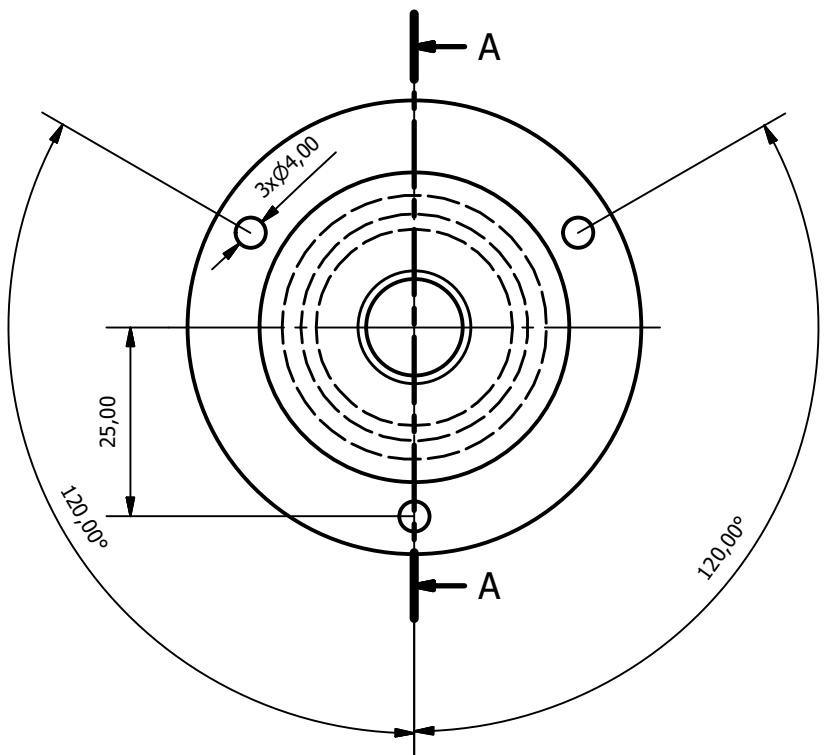
TÍTULO: BOMBA TESLA DE CDs - DESENHO DE FABRICAÇÃO - PORTA-ROLAMENTOS									
NOME: DIEGO HAYASHI ALONSO							NÚMERO USP: 8038128		
FOLHA: A4	ESCALA: 1:1	UNIDADES: mm	DATA: 02/11/2017	NÚMERO DA FOLHA: 12	MATERIAL: ALUMÍNIO	QUANTIDADE: 1	1º DIEDRO: 		



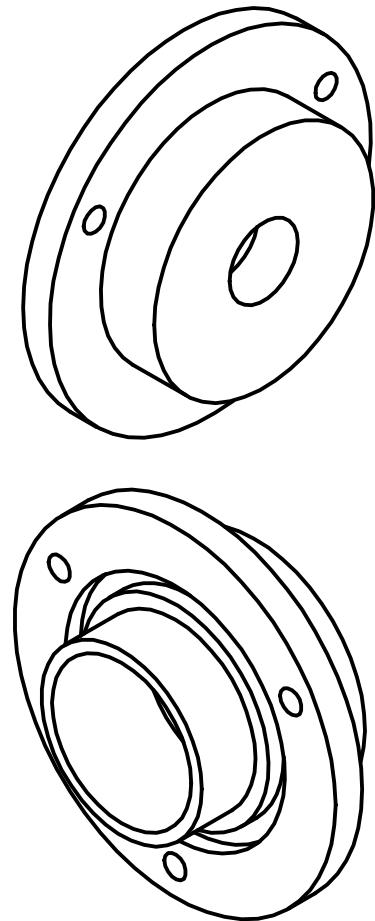
Tolerância geral de rugosidade (quando não há valor indicado):  $1,6\checkmark$   
(Manf   et al., vol. 3, 2004, p.22)

Tolerância geral de dimensão (quando não há valor indicado):  $\pm 0,02$

TÍTULO: <b>BOMBA TESLA DE CDs-DESENHO DE FABRICA��O-APOIO EXTERNO DO PORTA-ROLAMENTOS</b>						
NOME: <b>DIEGO HAYASHI ALONSO</b>				NÚMERO USP: <b>8038128</b>		
FOLHA:	ESCALA:	UNIDADES:	DATA:	NÚMERO DA FOLHA:	MATERIAL:	QUANTIDADE: 1 <sup>o</sup> DIEDRO:
A4	1:1	mm	02/11/2017	13	<b>ALUMÍNIO</b>	



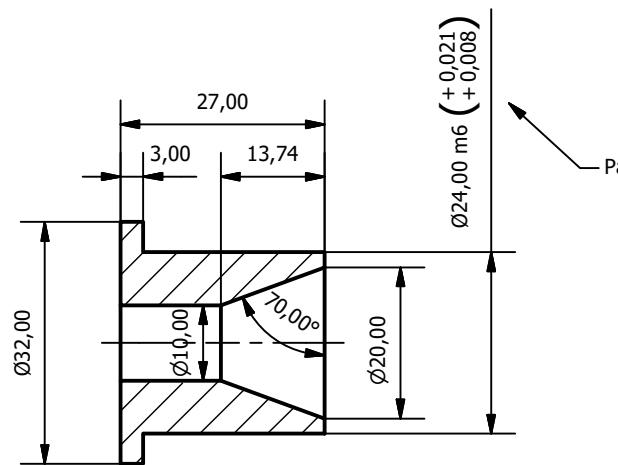
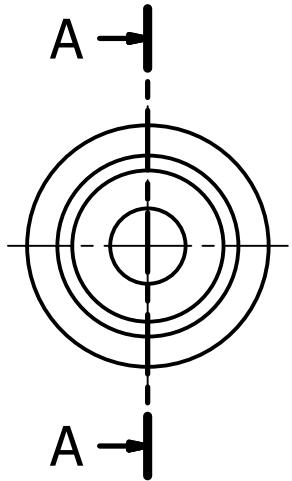
SEÇÃO A-A ( 1 : 1 )



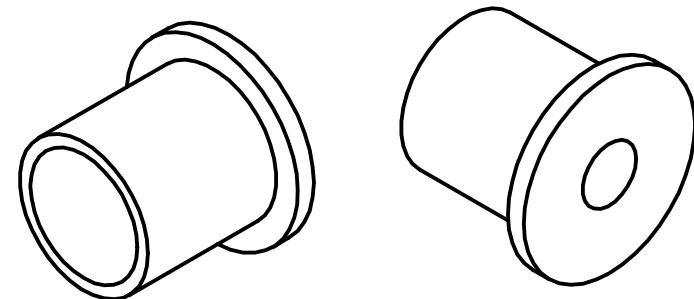
Tolerância geral de rugosidade (quando não há valor indicado):  $1,6 \checkmark$

Tolerância geral de dimensão (quando não há valor indicado):  $\pm 0,02$

TÍTULO: BOMBA TESLA DE CDs - DESENHO DE FABRICAÇÃO - CANAL DE ENTRADA									
NOME: DIEGO HAYASHI ALONSO							NÚMERO USP: 8038128		
FOLHA: A4	ESCALA: 1:1	UNIDADES: mm	DATA: 02/11/2017	NÚMERO DA FOLHA: 14	MATERIAL: ALUMÍNIO	QUANTIDADE: 1	1º DIEDRO: 		



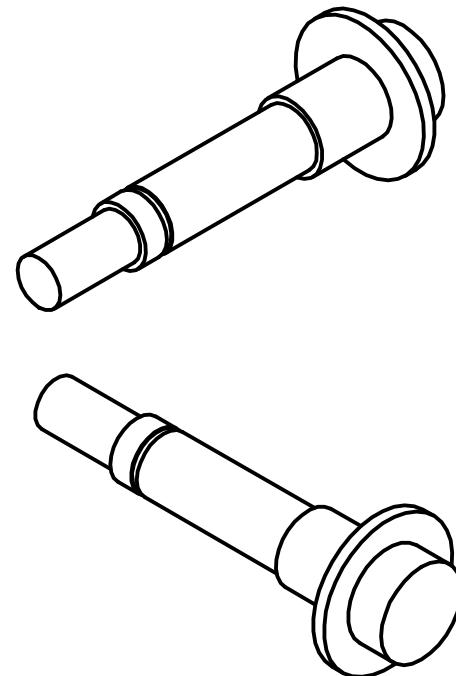
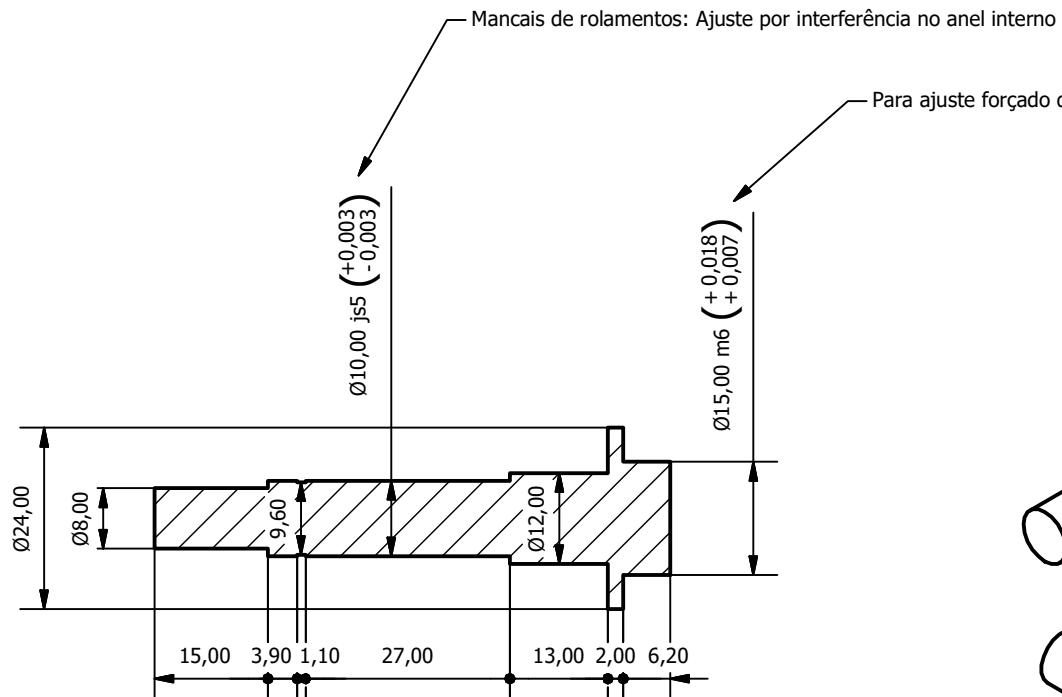
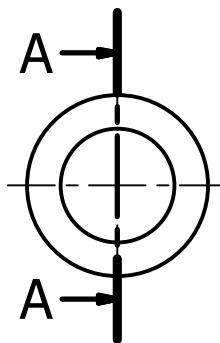
SEÇÃO A-A ( 1 : 1 )



Tolerância geral de rugosidade (quando não há valor indicado):  $1,6 \checkmark$   
(Manf   et al., vol. 3, 2004, p.22)

Tolerância geral de dimensão (quando não há valor indicado):  $\pm 0,02$

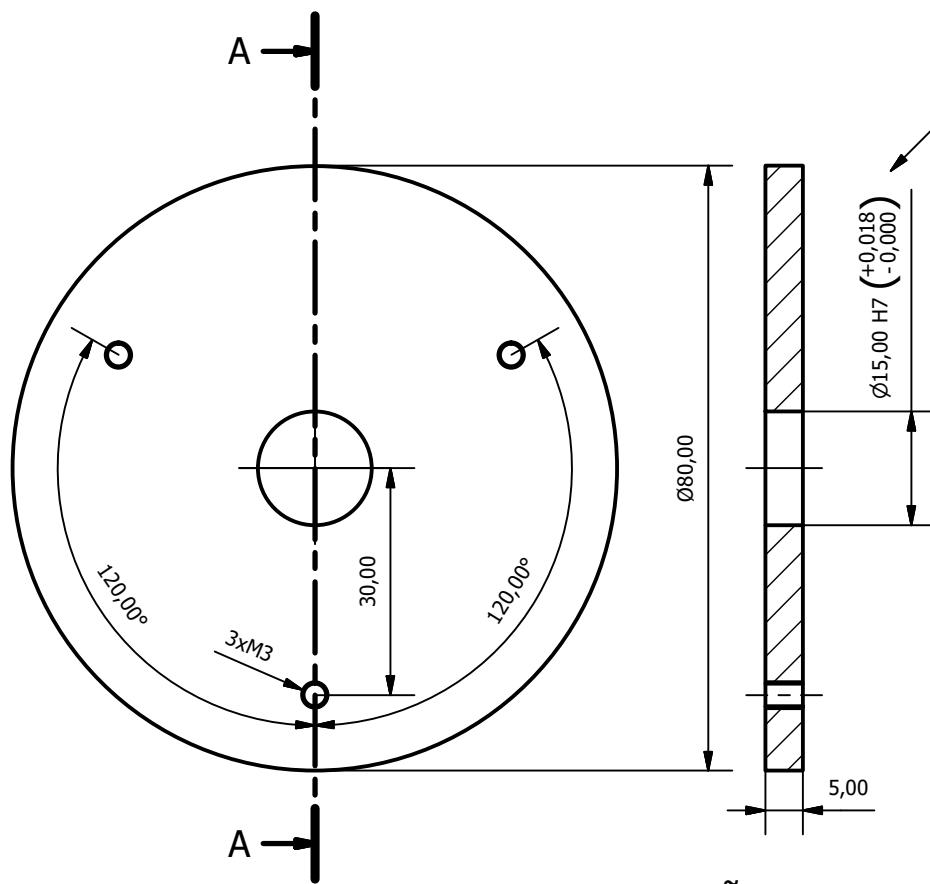
TÍTULO: BOMBA TESLA DE CDs - DESENHO DE FABRICA��O - EIXO DE ENTRADA									
NOME: DIEGO HAYASHI ALONSO						NÚMERO USP: 8038128			
FOLHA:	ESCALA:	UNIDADES:	DATA:	NÚMERO DA FOLHA:	MATERIAL:	QUANTIDADE:	1 <sup>o</sup> DIEDRO:		
A4	1:1	mm	02/11/2017	15	ALUMÍNIO	1			



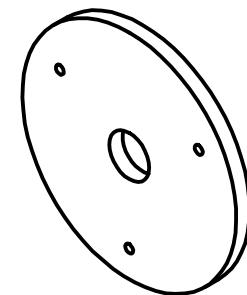
Tolerância geral de rugosidade (quando não há valor indicado):  $1,6 \sqrt{\text{ }}$   
(Manf   et al., vol. 3, 2004, p.22)

Tolerância geral de dimensão (quando não há valor indicado):  $\pm 0,02$

TÍTULO: <b>BOMBA TESLA DE CDs - DESENHO DE FABRICAÇÃO - EIXO CONECTADO AO MOTOR</b>								
NOME: <b>DIEGO HAYASHI ALONSO</b>				NÚMERO USP: <b>8038128</b>				
FOLHA: <b>A4</b>	ESCALA: <b>1:1</b>	UNIDADES: <b>mm</b>	DATA: <b>02/11/2017</b>	NÚMERO DA FOLHA: <b>16</b>	MATERIAL: <b>ALUMÍNIO</b>	QUANTIDADE: <b>1</b>	1º DIEDRO:	



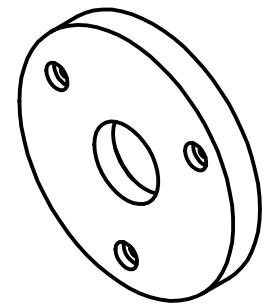
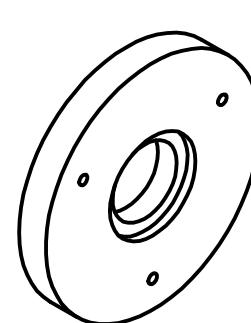
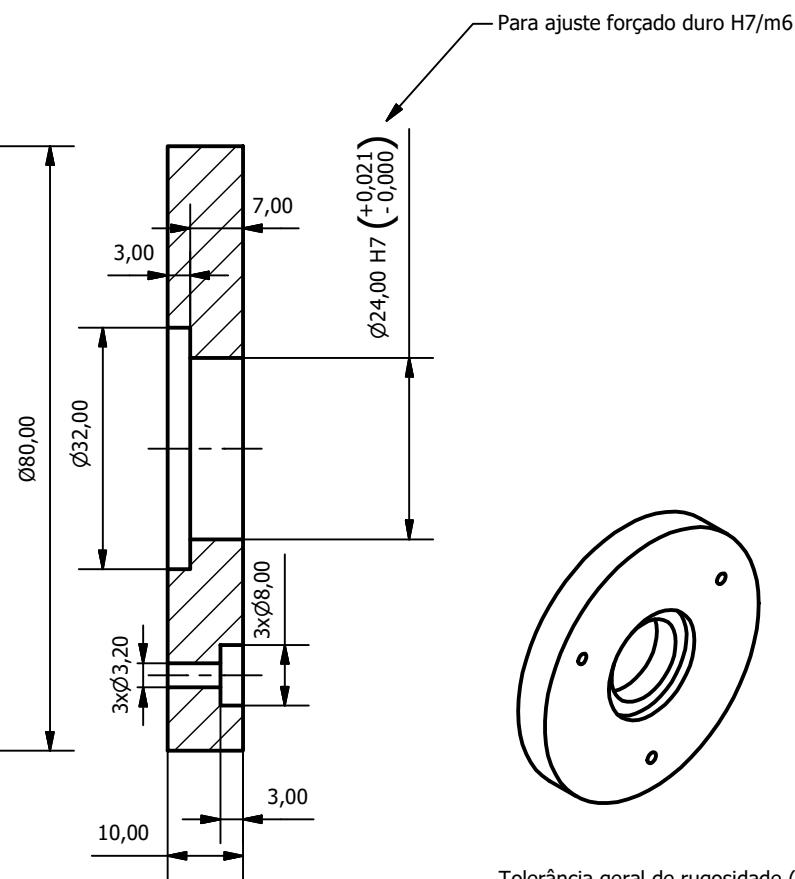
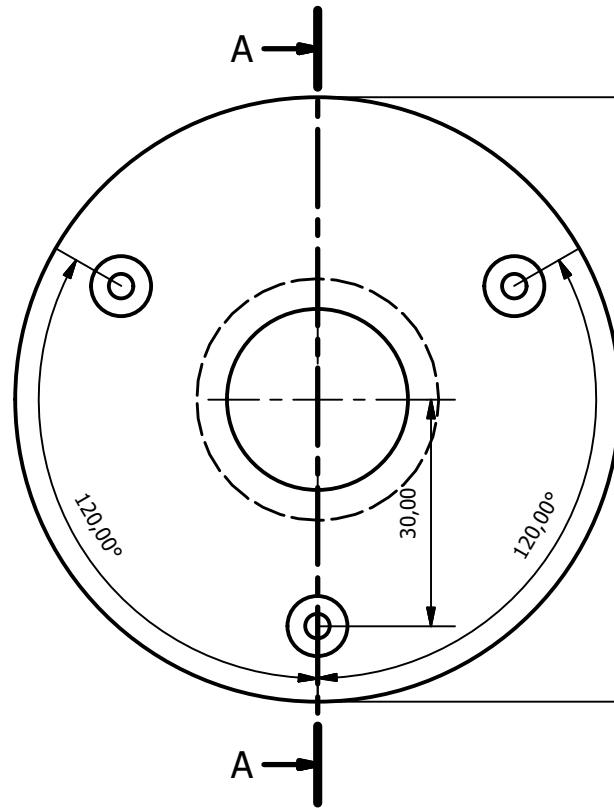
Para ajuste forçado duro H7/m6



Tolerância geral de rugosidade (quando não há valor indicado): 1,6 ✓  
(Manfê et al., vol. 3, 2004, p.22)

Tolerância geral de dimensão (quando não há valor indicado):  $\pm 0,02$

TÍTULO: BOMBA TESLA DE CDs-DESENHO DE FABRICAÇÃO-FLANGE DO EIXO CONECTADO AO MOTOR								
NOME: DIEGO HAYASHI ALONSO							NÚMERO USP: 8038128	
FOLHA: A4	ESCALA: 1:1	UNIDADES: mm	DATA: 02/11/2017	NÚMERO DA FOLHA: 17	MATERIAL: ALUMÍNIO	QUANTIDADE: 1	1º DIEDRO: ∅	

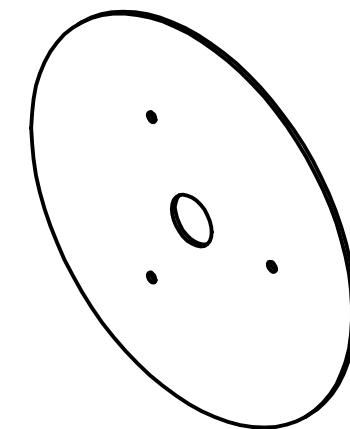
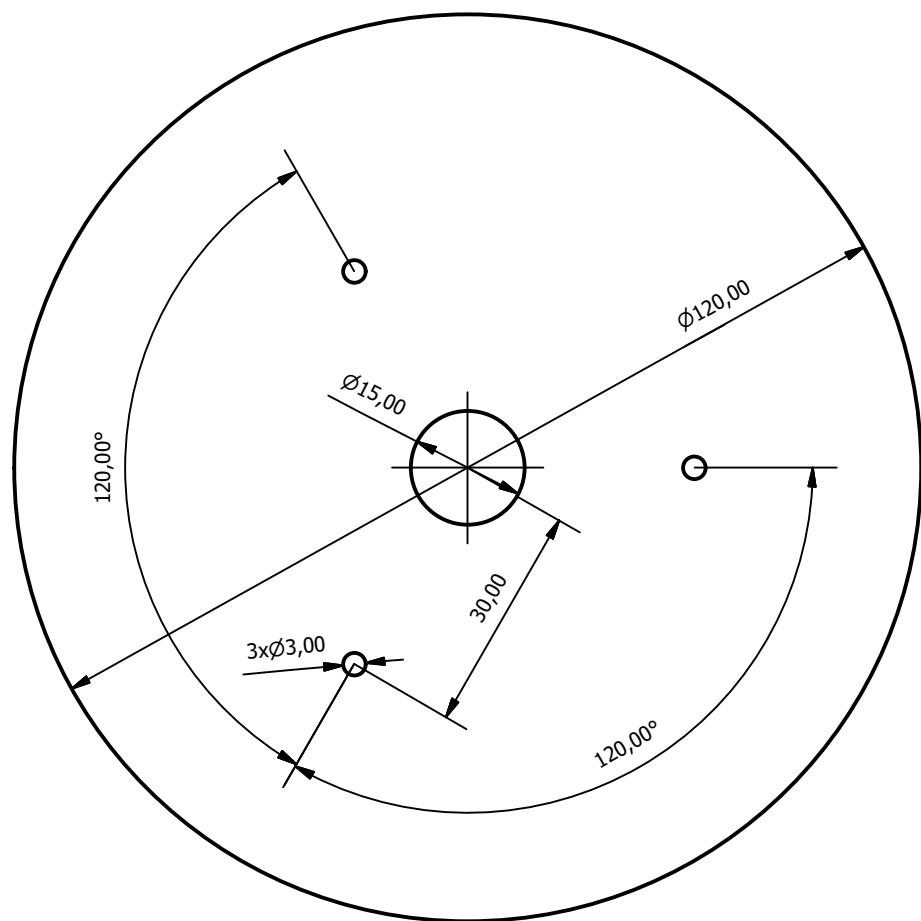


Tolerância geral de rugosidade (quando não há valor indicado): 1,6 ✓

SEÇÃO A-A ( 1 : 1 )

Tolerância geral de dimensão (quando não há valor indicado):  $\pm 0,02$

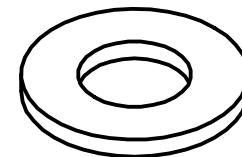
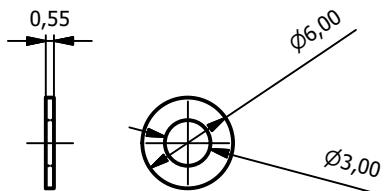
TÍTULO: BOMBA TESLA DE CDs - DESENHO DE FABRICAÇÃO - FLANGE DO EIXO DE ENTRADA									
NOME: DIEGO HAYASHI ALONSO							NÚMERO USP: 8038128		
FOLHA: A4	ESCALA: 1:1	UNIDADES: mm	DATA: 02/11/2017	NÚMERO DA FOLHA: 18	MATERIAL: ACRÍLICO	QUANTIDADE: 1	1º DIEDRO: 		



Tolerância geral de rugosidade (quando não há valor indicado): 1,6 ✓

Tolerância geral de dimensão (quando não há valor indicado): ±0,02

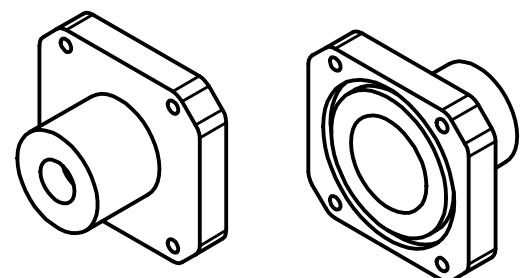
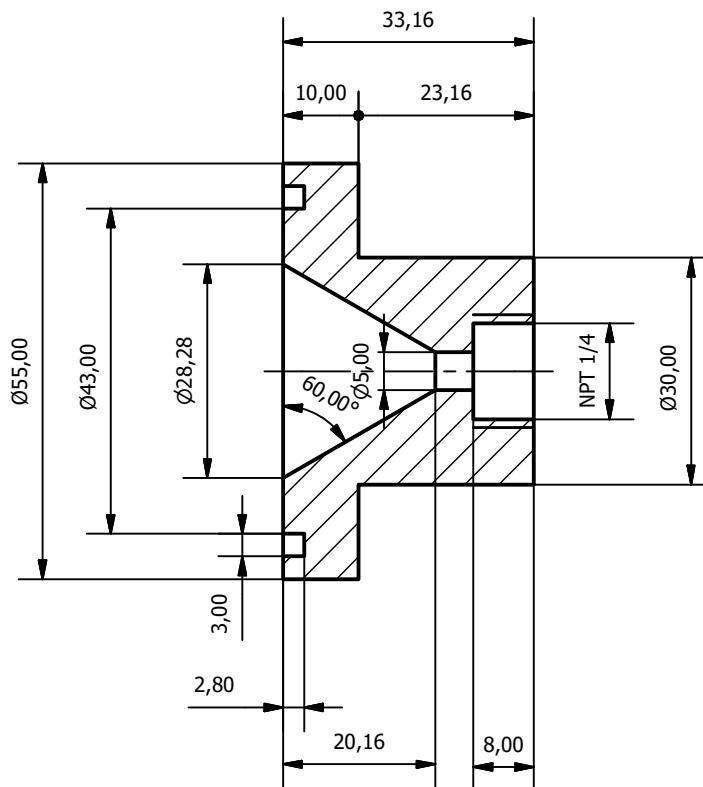
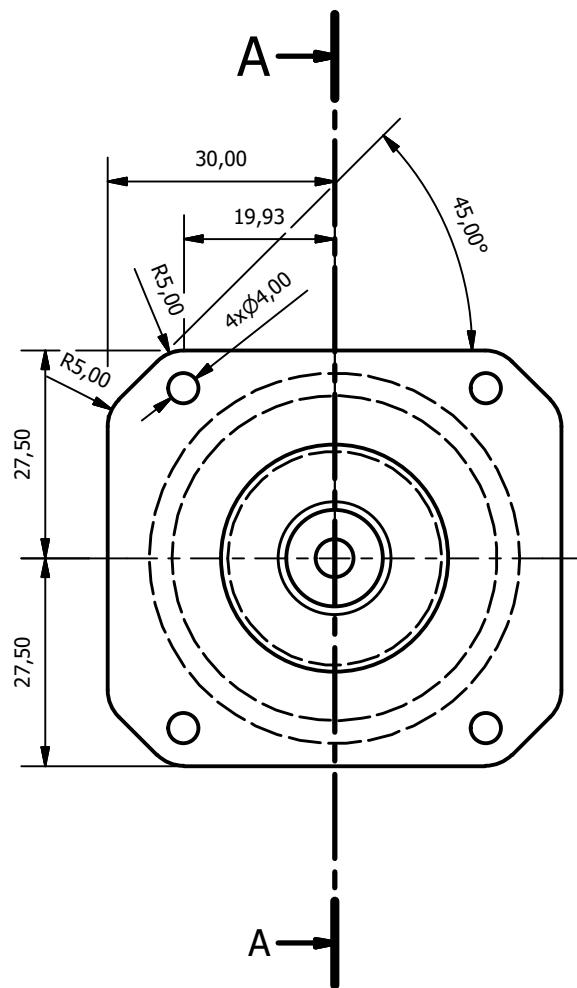
TÍTULO: <b>BOMBA TESLA DE CDs - DESENHO DE FABRICAÇÃO - CD</b>							
NOME: <b>DIEGO HAYASHI ALONSO</b>				NÚMERO USP: <b>8038128</b>			
FOLHA:	ESCALA:	UNIDADES:	DATA:	NÚMERO DA FOLHA:	MATERIAL:	QUANTIDADE:	1º DIEDRO:
<b>A4</b>	<b>1:1</b>	<b>mm</b>	<b>02/11/2017</b>	<b>19</b>	<b>CD</b>	<b>5</b>	



Tolerância geral de rugosidade (quando não há valor indicado): 1,6  
(Manfè et al., vol. 3, 2004, p.22)

Tolerância geral de dimensão (quando não há valor indicado):  $\pm 0,01$

TÍTULO: <b>BOMBA TESLA DE CDs - DESENHO DE FABRICAÇÃO - ESPAÇADOR</b>							
NOME: <b>DIEGO HAYASHI ALONSO</b>					NÚMERO USP: <b>8038128</b>		
FOLHA: <b>A4</b>	ESCALA: <b>2:1</b>	UNIDADES: <b>mm</b>	DATA: <b>02/11/2017</b>	NÚMERO DA FOLHA: <b>20</b>	MATERIAL: <b>POLÍMERO</b>	QUANTIDADE: <b>12</b>	1º DIEDRO: 



Tolerância geral de rugosidade (quando não há valor indicado): 1,6 ✓  
(Manfē et al., vol. 3, 2004, p.22)

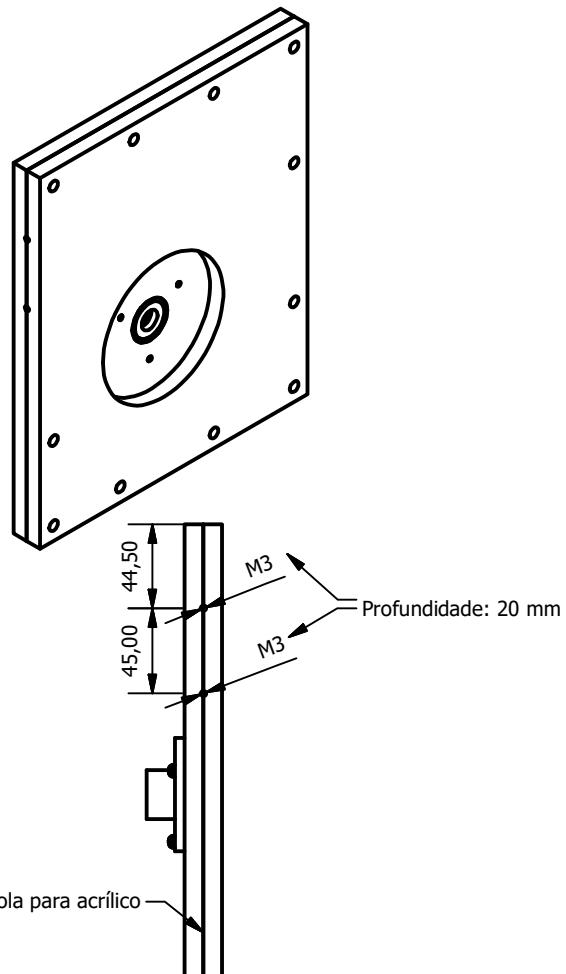
Tolerância geral de dimensão (quando não há valor indicado): ±0,01

**SEÇÃO A-A ( 1 : 1 )**

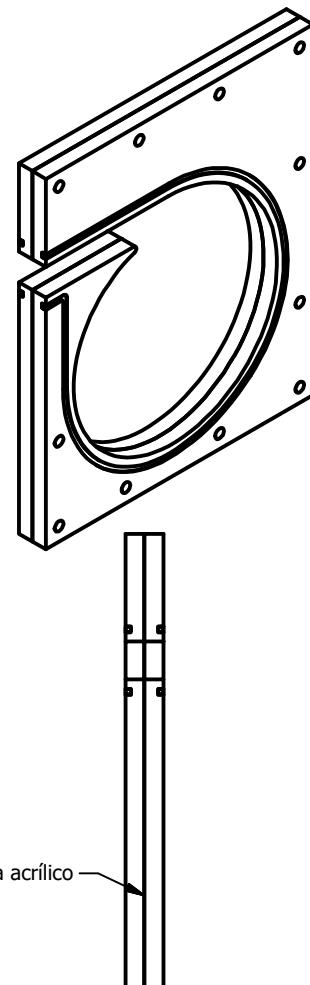
**TÍTULO:**  
**BOMBA TESLA DE CDs - DESENHO DE FABRICAÇÃO - BOCAL DE SAÍDA**

<b>NOME:</b> DIEGO HAYASHI ALONSO	<b>NÚMERO USP:</b> 8038128						
<b>FOLHA:</b> A4	<b>ESCALA:</b> 1:1	<b>UNIDADES:</b> mm	<b>DATA:</b> 02/11/2017	<b>NÚMERO DA FOLHA:</b> 21	<b>MATERIAL:</b> ALUMÍNIO	<b>QUANTIDADE:</b> 1	<b>1º DIEDRO:</b>

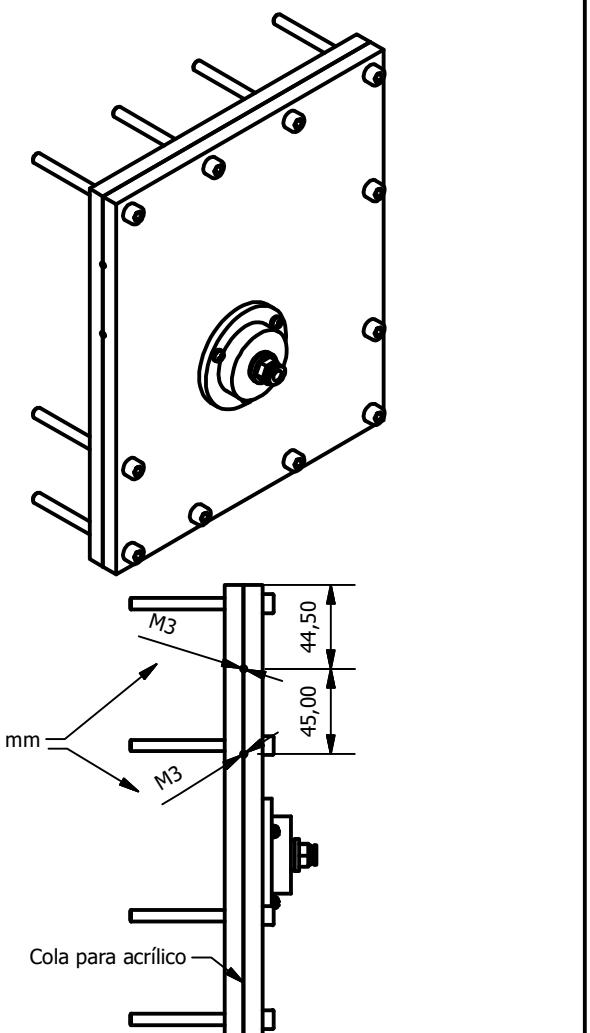
Verso da voluta



Voluta



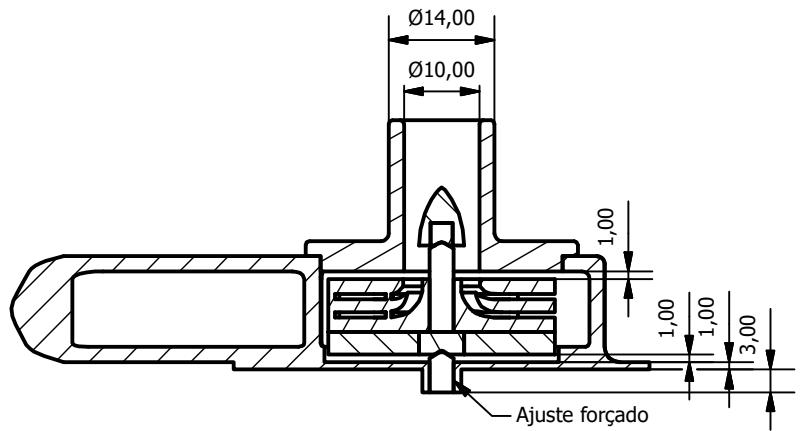
Tampa



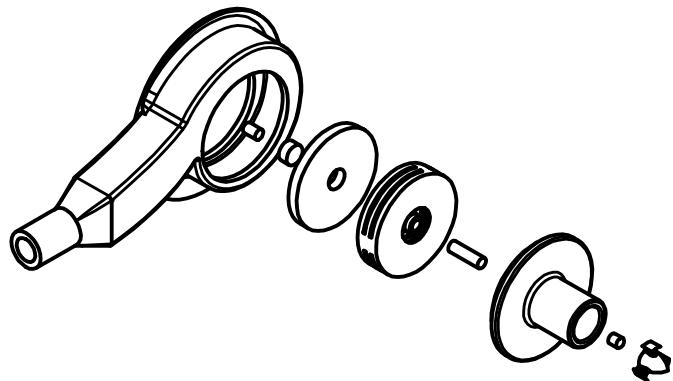
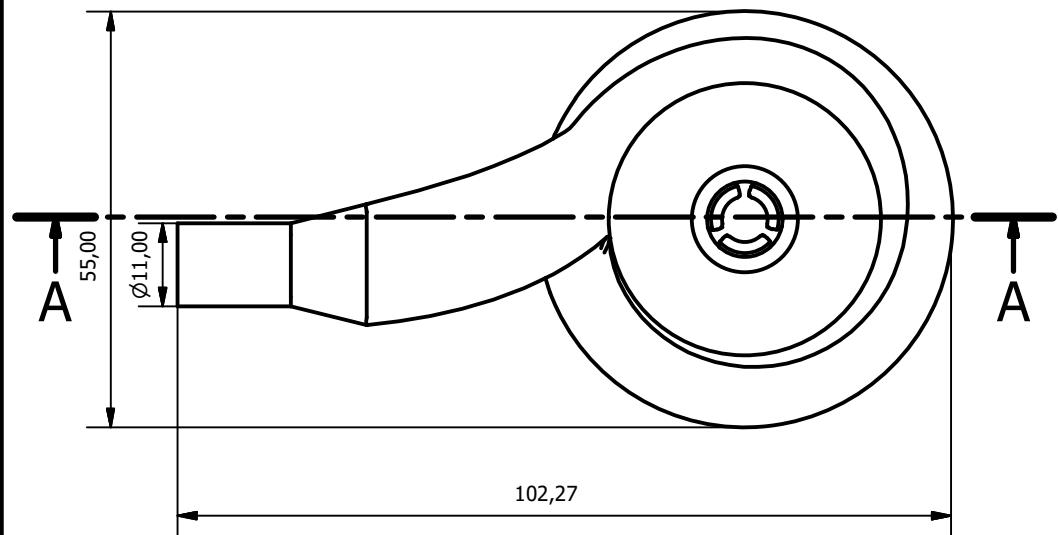
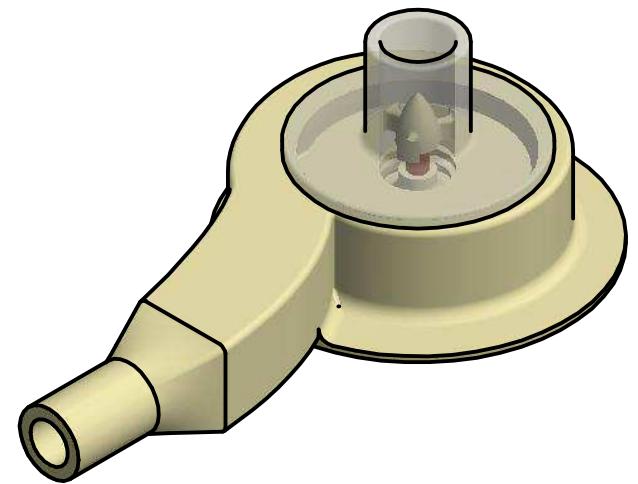
TÍTULO:  
BOMBA TESLA DE CDs - DESENHO DE FABRICAÇÃO - COLAGEM E FURAÇÃO DE CHAPAS

NOME: DIEGO HAYASHI ALONSO					NÚMERO USP: 8038128
FOLHA: A4	ESCALA: 1:4	UNIDADES: mm	DATA: 02/11/2017	NÚMERO DA FOLHA: 22	MATERIAL: -

QUANTIDADE:  
-  
1º DIEDRO:



SEÇÃO A-A ( 1 : 1 )



TÍTULO:

MINI BOMBA TESLA - MONTAGEM COM VOLUTA OTIMIZADA

NOME:

DIEGO HAYASHI ALONSO

NÚMERO USP:

8038128

FOLHA:

A4

ESCALA:

1:1

UNIDADES:

mm

DATA:

22/10/2017

NÚMERO DA FOLHA:

1

MATERIAL:

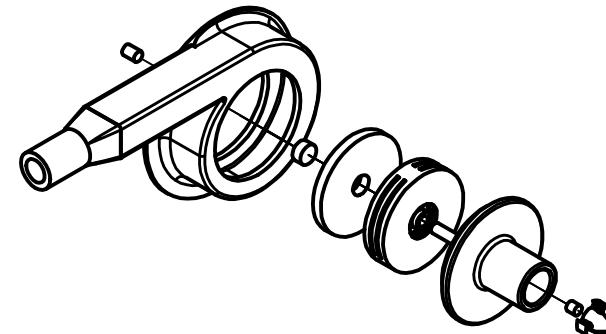
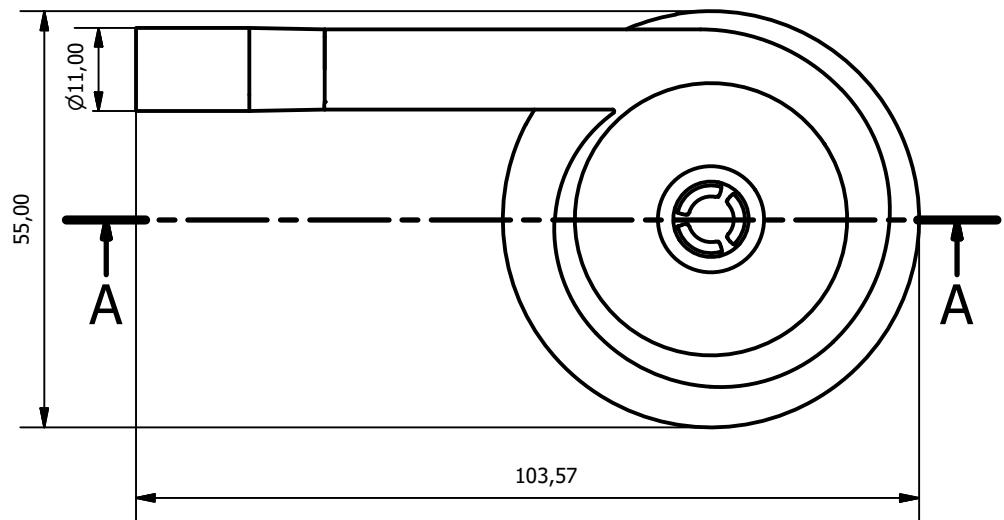
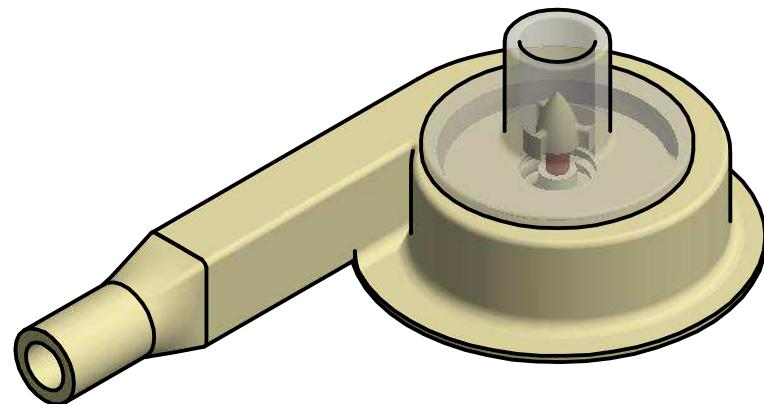
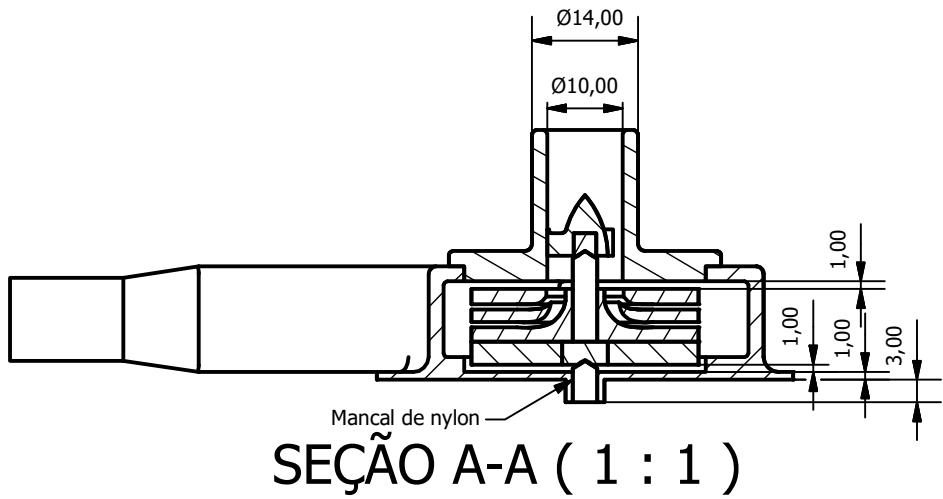
-

QUANTIDADE:

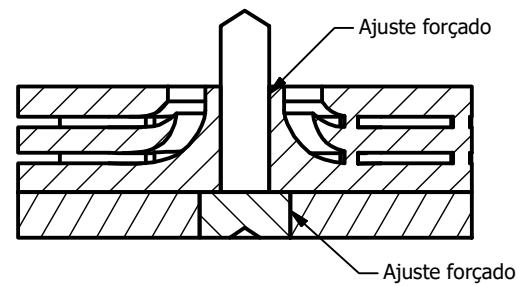
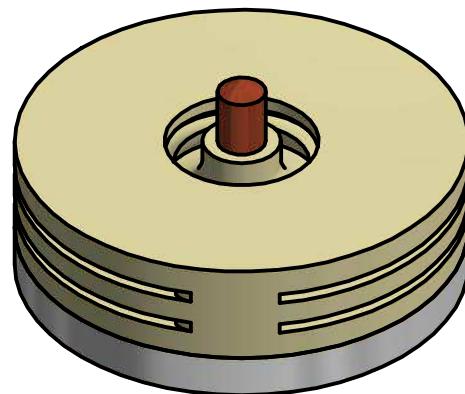
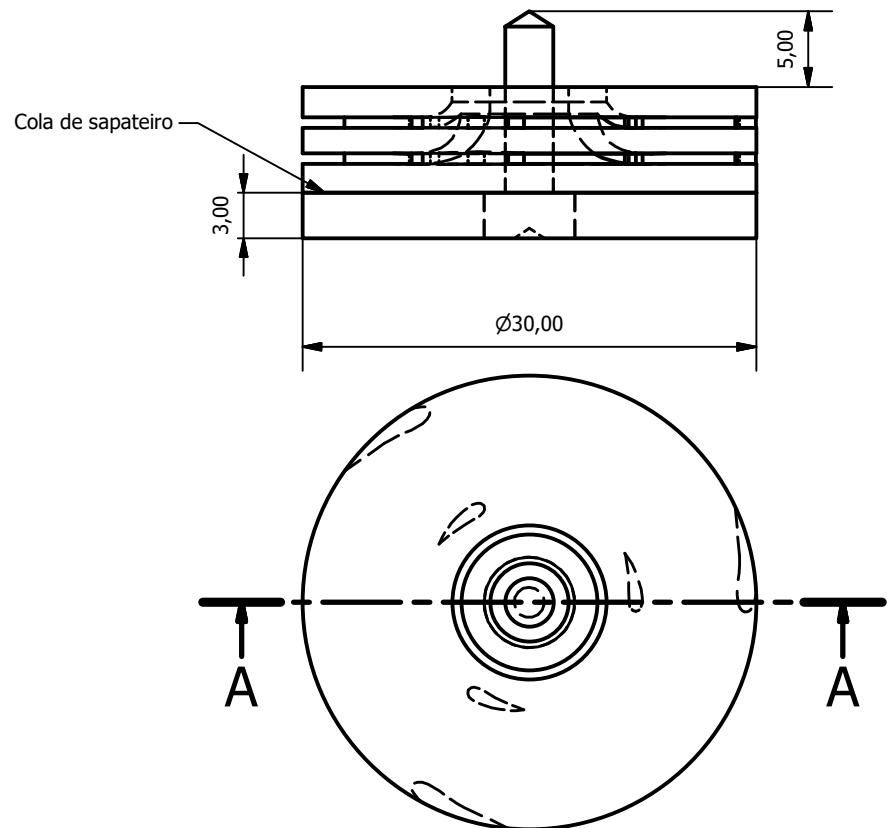
1

1º DIEDRO:





TÍTULO:		MINI BOMBA TESLA - MONTAGEM COM A VOLUTA PROJETADA CONVENCIONALMENTE					
NOME:		DIEGO HAYASHI ALONSO					
FOLHA:	ESCALA:	UNIDADES:	DATA:	NÚMERO DA FOLHA:	MATERIAL:	QUANTIDADE:	1º DIEDRO:
A4	1:1	mm	22/10/2017	2	-	1	



## SEÇÃO A-A ( 2 : 1 )

TÍTULO:

MINI BOMBA TESLA - MONTAGEM DE UM ROTOR

NOME:

DIEGO HAYASHI ALONSO

NÚMERO USP:

8038128

FOLHA:

A4

ESCALA:

2:1

UNIDADES:

mm

DATA:

18/10/2017

NÚMERO DA FOLHA:

3

MATERIAL:

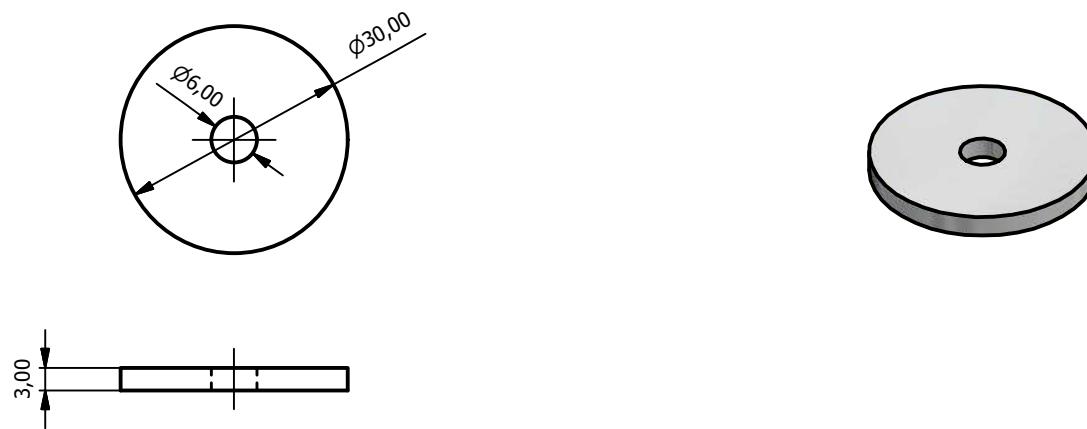
-

QUANTIDADE:

1

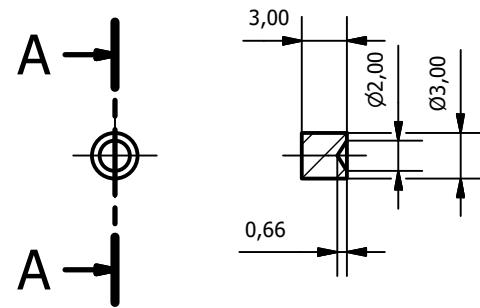
1º DIEDRO:





TÍTULO:  
MINI BOMBA TESLA - DESENHO DE FABRICAÇÃO - DISCO DE ALUMÍNIO

NOME: DIEGO HAYASHI ALONSO				NÚMERO USP: 8038128			
FOLHA:	ESCALA:	UNIDADES:	DATA:	NÚMERO DA FOLHA:	MATERIAL:	QUANTIDADE:	1º DIEDRO:
A4	1:1	mm	22/10/2017	4	ALUMÍNIO	3	



SEÇÃO A-A ( 2:1 )

TÍTULO:

MINI BOMBA TESLA - DESENHO DE FABRICAÇÃO - MANCAL 1

NOME:

DIEGO HAYASHI ALONSO

NÚMERO USP:

8038128

FOLHA:

A4

ESCALA:

2:1

UNIDADES:

mm

DATA:

22/10/2017

NÚMERO DA FOLHA:

5

MATERIAL:

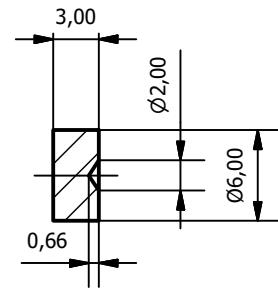
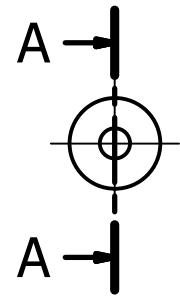
Nylon ou UHM

QUANTIDADE:

1

1º DIEDRO:





SEÇÃO A-A ( 2 : 1 )



TÍTULO: MINI BOMBA TESLA - DESENHO DE FABRICAÇÃO - MANCAL 2									
NOME: DIEGO HAYASHI ALONSO							NÚMERO USP: 8038128		
FOLHA:	ESCALA:	UNIDADES:	DATA:	NÚMERO DA FOLHA:	MATERIAL:	QUANTIDADE:	1º DIEDRO:		

A4

2:1

mm

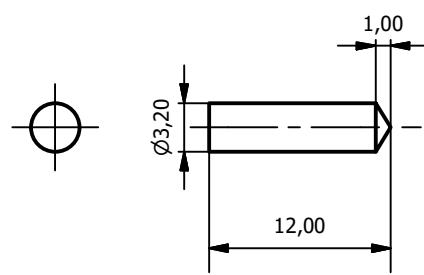
27/10/2017

6

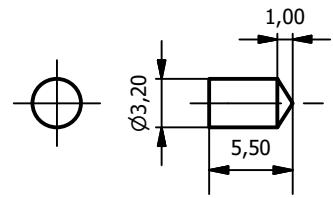
Nylon ou UHM

1

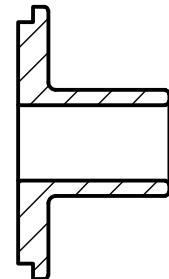
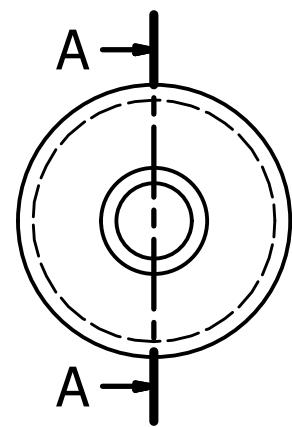
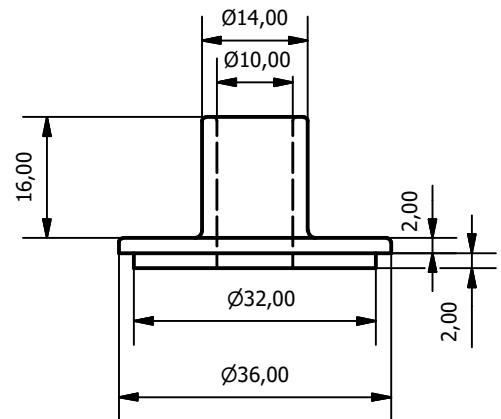




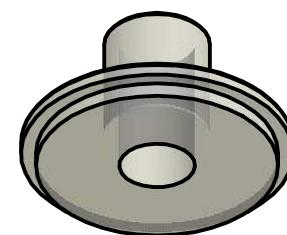
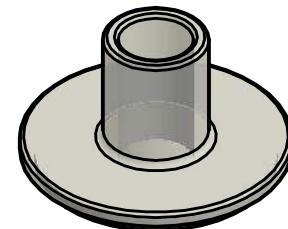
TÍTULO: <b>MINI BOMBA TESLA - DESENHO DE FABRICAÇÃO - EIXO 1</b>															
NOME: <b>DIEGO HAYASHI ALONSO</b>							NÚMERO USP: <b>8038128</b>								
FOLHA:	ESCALA:	UNIDADES:	DATA:	NÚMERO DA FOLHA:	MATERIAL:	QUANTIDADE:	1º DIEDRO:	A4	2:1	mm	22/10/2017	7	<b>LATÃO</b>	1	



TÍTULO: <b>MINI BOMBA TESLA - DESENHO DE FABRICAÇÃO - EIXO 2</b>									
NOME: <b>DIEGO HAYASHI ALONSO</b>							NÚMERO USP: <b>8038128</b>		
FOLHA:	ESCALA:	UNIDADES:	DATA:	NÚMERO DA FOLHA:	MATERIAL:	QUANTIDADE:	1º DIEDRO:		
A4	2:1	mm	27/11/2017	8	<b>LATÃO</b>	1			



SEÇÃO A-A ( 1:1 )



TÍTULO:

MINI BOMBA TESLA - TAMPA

NOME:

DIEGO HAYASHI ALONSO

NÚMERO USP:

8038128

FOLHA:

A4

ESCALA:

1:1

UNIDADES:

mm

DATA:

22/10/2017

NÚMERO DA FOLHA:

9

MATERIAL:

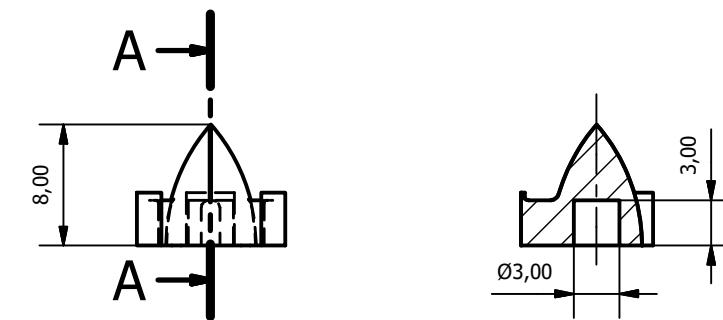
-

QUANTIDADE:

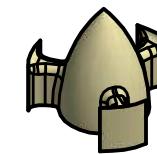
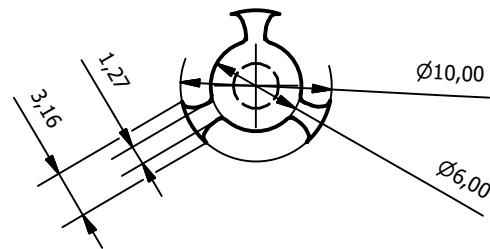
1

1º DIEDRO:





SEÇÃO A-A ( 2 : 1 )



TÍTULO:

MINI BOMBA TESLA - ASSENTO DO MANCAL DA TAMPA

NOME:

DIEGO HAYASHI ALONSO

NÚMERO USP:

8038128

FOLHA:

A4

ESCALA:

2:1

UNIDADES:

mm

DATA:

27/10/2017

NÚMERO DA FOLHA:

10

MATERIAL:

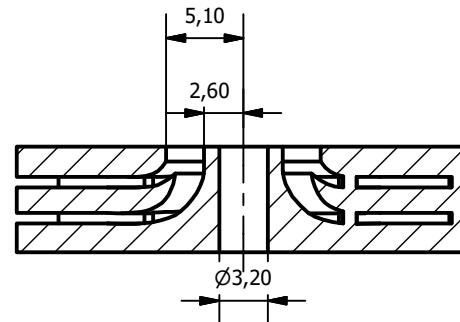
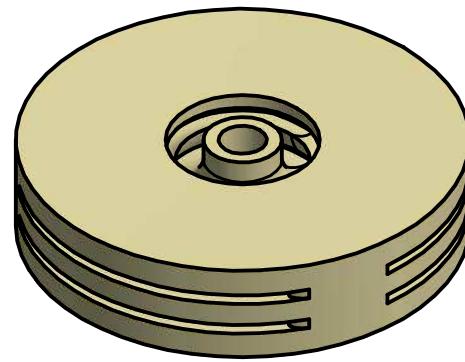
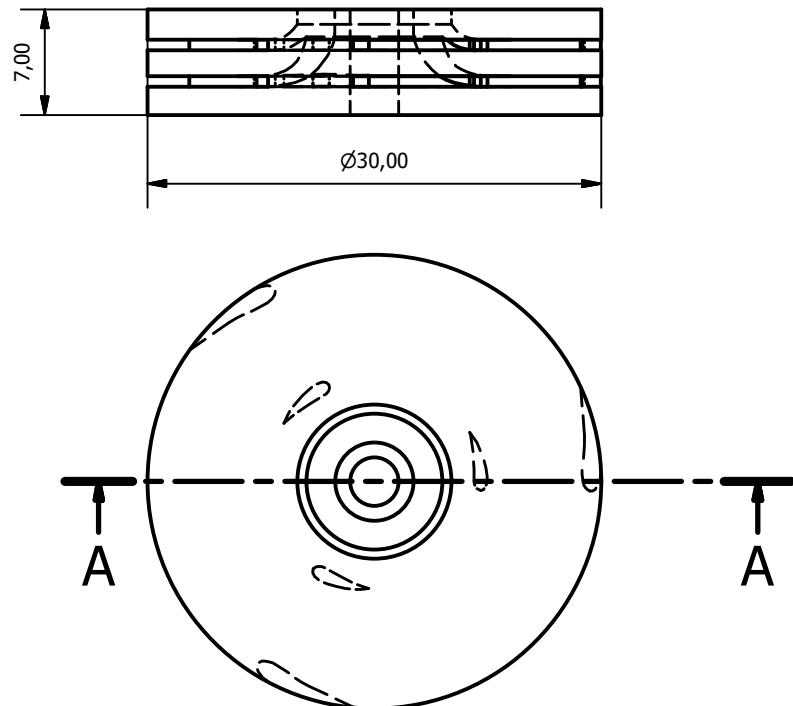
-

QUANTIDADE:

1

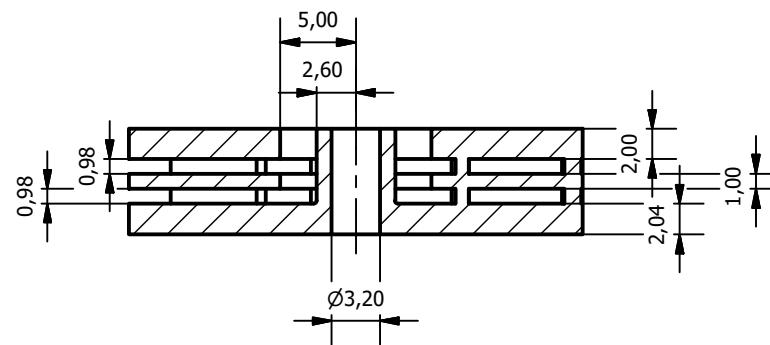
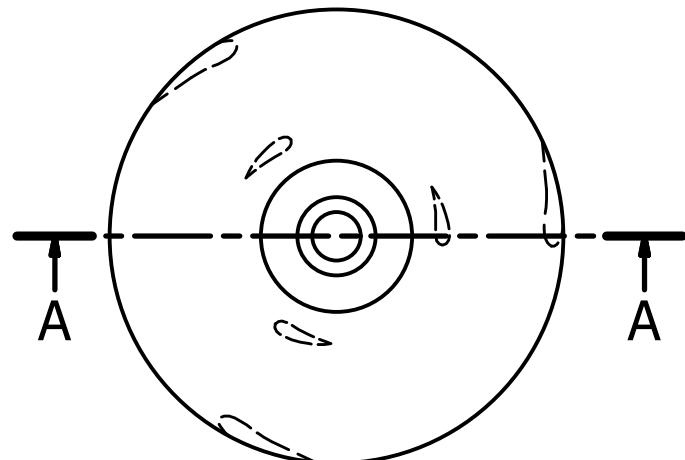
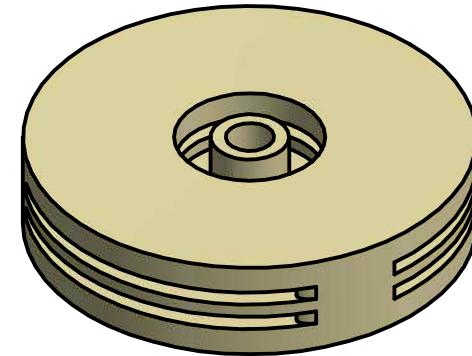
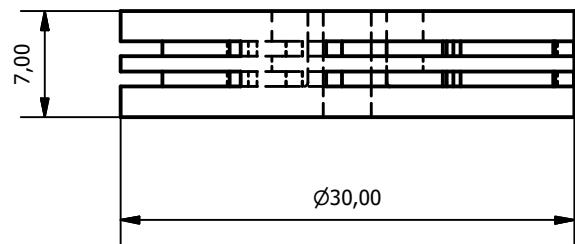
1º DIEDRO:





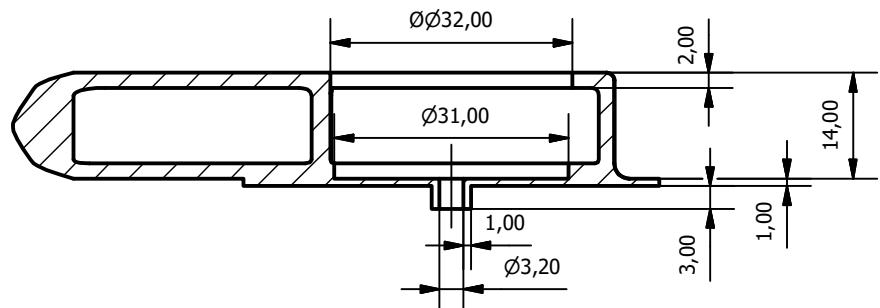
SEÇÃO A-A ( 2: 1 )

TÍTULO: MINI BOMBA TESLA - DESENHO DE FABRICAÇÃO - ROTOR OTIMIZADO									
NOME: DIEGO HAYASHI ALONSO						NÚMERO USP: 8038128			
FOLHA:	ESCALA:	UNIDADES:	DATA:	NÚMERO DA FOLHA:	MATERIAL:	QUANTIDADE:	1º DIEDRO:		
A4	2:1	mm	23/10/2017	11	-	1			

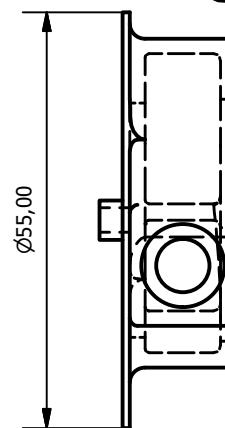
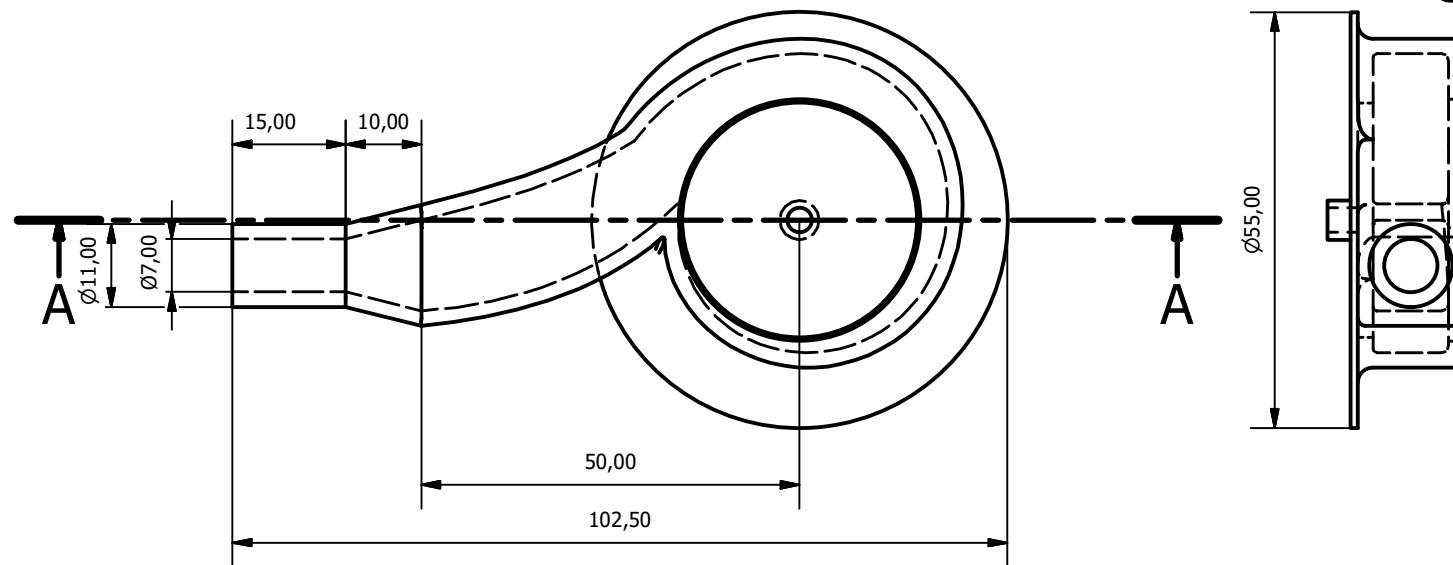
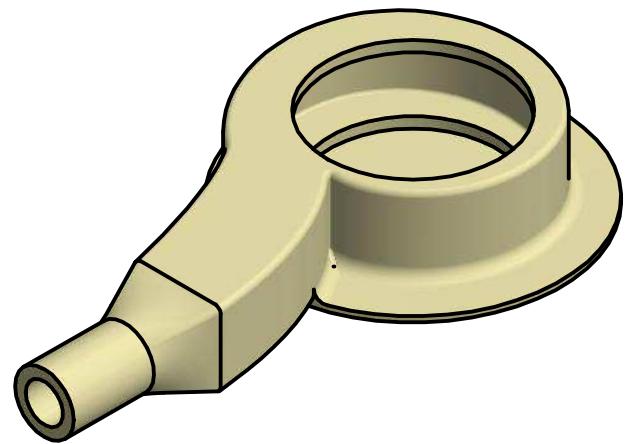


SEÇÃO A-A ( 2 : 1 )

TÍTULO: MINI BOMBA TESLA-DESENHO DE FABRICAÇÃO - ROTOR DE DISCOS RETOS							
NOME: DIEGO HAYASHI ALONSO					NÚMERO USP: 8038128		
FOLHA:	ESCALA:	UNIDADES:	DATA:	NÚMERO DA FOLHA:	MATERIAL:	QUANTIDADE:	1º DIEDRO:
A4	2:1	mm	23/10/2017	12	-	1	



SEÇÃO A-A ( 1 : 1 )



TÍTULO:

MINI BOMBA TESLA - DESENHO DE FABRICAÇÃO - VOLUTA OTIMIZADA

NOME:

DIEGO HAYASHI ALONSO

NÚMERO USP:

8038128

FOLHA:

A4

ESCALA:

1:1

UNIDADES:

mm

DATA:

22/10/2017

NÚMERO DA FOLHA:

13

MATERIAL:

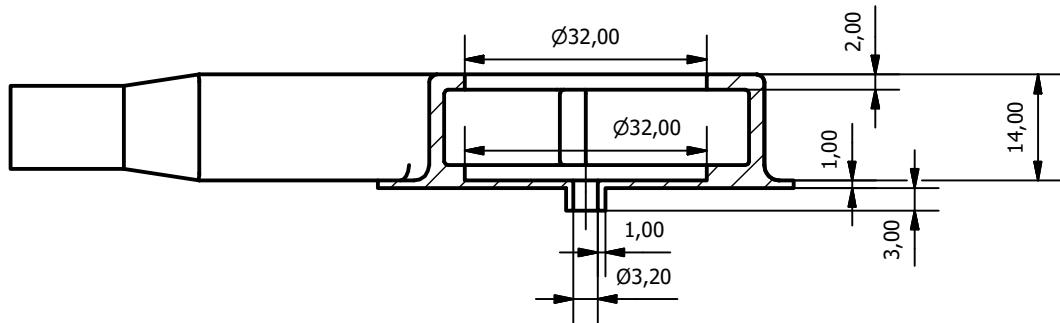
-

QUANTIDADE:

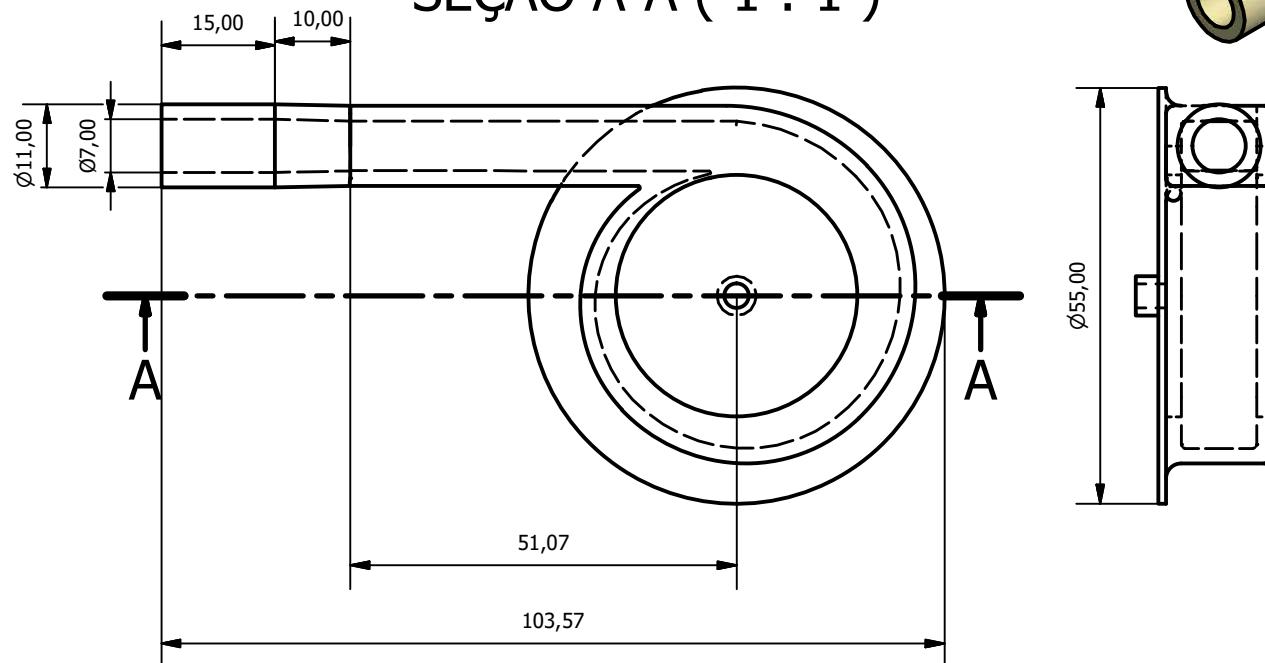
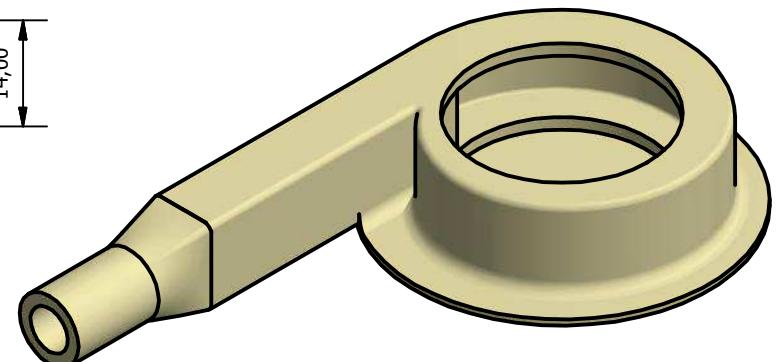
1

1º DIEDRO:





SEÇÃO A-A ( 1 : 1 )



TÍTULO:  
MINI BOMBA TESLA-DESENHO DE FABRICAÇÃO - VOLUTA PROJETADA CONVENCIONALMENTE

NOME: DIEGO HAYASHI ALONSO				NÚMERO USP: 8038128
FOLHA: A4	ESCALA: 1:1	UNIDADES: mm	DATA: 22/10/2017	NÚMERO DA FOLHA: 14

MATERIAL:

QUANTIDADE:

1º DIEDRO:  
